Libros de Cátedra

# Circuitos eléctricos

## Parte I

Marcos Deorsola y Pablo Morcelle del Valle

FACULTAD DE INGENIERÍA

e exactas

edulp Editorial de la Universidad de La Plata

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

# CIRCUITOS ELÉCTRICOS

Parte 1

Marcos Deorsola
Pablo Morcelle del Valle

Facultad de Ingeniería

## Agradecimientos

Al Ing. Augusto Cassino por su colaboración en la realización de los dibujos de circuitos y el aporte de ejemplos resueltos.

# Índice

**APÉNDICE A**



**APÉNDICE B**



**APÉNDICE C**



**APÉNDICE D**

# PRESENTACIÓN

Durante los últimos cien años, la electricidad ha cambiado la forma en que vivimos. Hoy en día resulta inimaginable la actividad humana sin esta forma de energía, al punto tal que sólo advertimos su necesidad cuando carecemos de ella. Es así que puede entenderse la importancia de la ingeniería eléctrica.

Dado que diversas especialidades de la ingeniería requieren conocimientos de la disciplina eléctrica, el presente texto fue concebido para ser utilizado por estudiantes del primer curso de teoría de circuitos de las carreras de ingeniería directamente relacionadas con las ramas eléctrica y electrónica. Asimismo, el texto puede ser también usado por estudiantes de ingenierías distintas de las mencionadas (mecánica, electromecánica, computación e industrial) para afrontar los cursos afines a la disciplina eléctrica. Esto surge de la experiencia de los autores, quienes vienen desempeñándose durante muchos años como docentes de Teoría de Circuitos y de Electrotecnia, asignaturas de las carreras indicadas.

El objetivo de este libro es lograr que el estudiante comprenda los conceptos y las ideas en términos que ya conoce y prepararlo para resolver problemas con base en la comprensión de dichos conceptos y no en la memorización de fórmulas y procedimientos; desarrollando de esta manera las habilidades que le permitan enfrentar estudios posteriores de temas relacionados.

En virtud de lo mencionado, el orden en que se presentan los temas no es casual. El texto expone los principios básicos de la teoría de circuitos desde sus conceptos físicos más elementales a partir de la teoría del electromagnetismo, cuyo desarrollo ocupa el Capítulo 1.

El Capítulo 2 sitúa al lector en el estudio de los elementos de circuito (resistor, inductor, capacitor y fuentes de tensión y de corriente), la relación entre la corriente y la tensión en cada uno de dichos elementos; presenta las leyes de Kirchhoff y un estudio de la potencia y la energía. Con la excusa de estudiar algunos circuitos simples, se presentan los instrumentos de medición más elementales (voltímetro y amperímetro) y por último se introduce la propiedad de dualidad.

En el Capítulo 3, y a partir de las leyes de Ohm y Kirchhoff se desarrollan las técnicas de análisis y los circuitos equivalentes de Thevenin y de Norton.

En el Capítulo 4 se estudian los circuitos excitados con señales alternas senoidales, presentándose el análisis fasorial.

El Capítulo 5 trata los circuitos acoplados magnéticamente, introduciendo los parámetro inherentes de este tipo de circuitos (coeficientes de acoplamiento y de inductancia mutua), además de los puntos homólogos. Se estudian diferentes configuraciones de circuitos acoplados, planteando su resolución; culminando con el circuito equivalente conductivo, el cual se plantea a partir del estudio del circuito inductivo de flujos separados.

Finalmente, el Capítulo 6 presenta el análisis de circuitos en régimen transitorio, analizando diferentes configuraciones.

Complementan el contenido la obra una serie de apéndices, consistentes en una propuesta de nomenclatura y simbología de circuitos eléctricos, un apartado especial sobre *modelo*, un listado de bibliografía y una serie de ejemplos resueltos.

Los autores.

# LOS AUTORES

**Marcos Deorsola**
Es Ingeniero en Telecomunicaciones de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata habiendo desarrollado su actividad profesional en el ámbito de dicha Facultad en forma ininterrumpida. Inicia como docente auxiliar en 1968. Como Profesor Adjunto, desde 1979, es responsable de la creación, organización y atención de la cátedra Electrotecnia I en 1982. Profesor Titular Interino en 1983 y Ordinario en 1986. A partir de 1992, Profesor Titular Ordinario de Teoría de circuitos I y Electrotecnia y Electrónica (sucesivamente para las carreras de Ingeniería Electricista, Electrónica, Mecánica, Electromecánica, Industrial y Computación, de la mencionada Facultad) hasta su jubilación en julio de 2016. Ha realizado cursos y seminarios relacionados con las especialidades eléctrica y electrónica y vinculados a diversos temas docentes. Participó de actividades de gestión universitaria: Coordinador docente del Área Básica de las carreras de Electricista y Electrónica (1994 a 2015) y Coordinador del Proyecto FOMEC 096: "Mejora de la enseñanza universitaria en Ingeniería Eléctrica y Electrónica como proceso integrado de docencia, postgrado, investigación y extensión" (1996 a 2005) en el Departamento de Electrotecnia, Facultad de Ingeniería, UNLP y Miembro de la Comisión Asesora de Enseñanza (1998 a 2008) de la Facultad de Ingeniería de la UNLP. Realizó apoyo a la investigación en Fisiología, Hidráulica y Física de líquidos biológicos a través del desarrollo de instrumental de medición. Formo parte del plantel profesional del Instituto de Investigaciones Tecnológicas para Redes y Equipos Eléctricos cumpliendo tareas de estudios y atención de ensayos sobre material eléctrico de baja, media y alta tensión; incluyendo tareas de calibraciones de instrumental y mediciones especiales. (1986 a 2011) Ha realizado publicaciones en congresos, encuentros, jornadas y seminarios, relacionadas con las tareas desarrolladas en el ámbito académico; tanto docente como profesional.

**Pablo Morcelle del Valle**
Es Ingeniero en Electrónica de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata (UNLP) habiendo desarrollado su actividad profesional en el ámbito de dicha Facultad y en diversas empresas del sector privado en forma ininterrumpida desde 1985. Desde fines de 1994 y hasta el presente, forma parte del plantel profesional del Instituto de Investigaciones Tecnológicas para Redes y Equipos Eléctricos - Laboratorio de Alta Tensión, Universidad nacional de La Plata (UNLP); desempeñándose en la realización de estudios, peritajes y atención de ensayos sobre material eléctrico de baja, media y alta tensión; incluyendo tareas de calibraciones de instrumental y mediciones especiales. Ha realizado diversos cursos y seminarios relacionados con las especialidades eléctrica y electrónica, así como en actividades vinculadas a la gestión de la calidad y temas docentes. Cuenta con numerosas publicaciones presentadas en congresos, encuentros, jornadas y seminarios, relacionadas con las tareas desarrolladas en el ámbito académico; tanto docente como profesional. Es docente universitario en la Facultad de Ingeniería de la UNLP desde el año 1987, revistando desde 2006 como Profesor Adjunto Ordinario con Dedicación Exclusiva en las cátedras de Electrotecnia y Electrónica y de Teoría de Circuitos I, correspondientes a las carreras de Ingeniería Electricista, Electrónica, Mecánica, Electromecánica, Industrial y Computación, de la mencionada Facultad. Participa en actividades de gestión universitaria como miembro de la Comisión Asesora de Investigación, Transferencia y Extensión de la Facultad de Ingeniería de la UNLP. Es miembro titular del Comité de Estudios de Cables Aislados del Centro de Investigación de Grandes Redes Eléctricas (CIGRE Argentina) y del Subcomité de Aisladores y Alta Tensión del Instituto Argentino de Normalización y Certificación (IRAM).

# CAPÍTULO 1
# Electromagnetismo y la teoría de circuitos

Uno de los objetivos de la ingeniería eléctrica es la creación de *modelos* adecuados que representen el comportamiento de circuitos en base a dos magnitudes fundamentales: la *corriente* y la *tensión*. La razón de esta afirmación es muy simple: dichos modelos deben permitir el análisis del circuito con el objeto de predecir su comportamiento, a partir de magnitudes que sean relativamente sencillas de medir.

Resulta evidente que la rama de la física que estudia el electromagnetismo es clave para lograr el objetivo mencionado. Es a partir de ella que se desarrolla toda lo referido a lo que hoy se conoce como *teoría de circuitos*.

Las leyes de Maxwell, Ohm, Kirchhoff, Lenz, Faraday; son algunas de herramientas básicas utilizadas para dichos fines.

El presente capítulo se inicia efectuando un repaso de las leyes de Maxwell y cómo a partir de éstas se obtienen las relaciones constitutivas entre la corriente y la tensión en los diferentes elementos de circuito que tienen en cuenta el comportamiento de la energía en cada uno de ellos.

## 1.1 Del electromagnetismo a la teoría de circuitos

Recordando las expresiones de las ecuaciones de Maxwell para campos variables en el tiempo, se puede escribir lo siguiente:

$$\int_{\mathbf{sc}} \mathbf{E}(r,t) \cdot \mathbf{dA} = \frac{q(t)}{\varepsilon_0} \qquad \text{Ec. 1-1}$$

$$\int_{\mathbf{sc}} \mathbf{B}(r,t) \cdot \mathbf{dA} = 0 \qquad \text{Ec. 1-2}$$

$$\oint_{\mathbf{c}} \mathbf{E}(r,t) \cdot \mathbf{dl} = -\int_{\mathbf{sc}} \frac{\delta \mathbf{B}(r,t)}{\delta t} \cdot \mathbf{dA} \qquad \text{Ec. 1-3}$$

$$\oint_{\mathbf{c}} \mathbf{B}(r,t) \cdot \mathbf{dl} = \mu_0 \cdot \left( i_{\mathbf{c}}(t) + \varepsilon_0 \cdot \int_{\mathbf{sc}} \frac{\delta \mathbf{E}(r,t)}{\delta t} \cdot \mathbf{dA} \right) \qquad \text{Ec. 1-4}$$

donde:

**sc**: superficie cerrada.

**c**: curva cerrada.

$\mathbf{E}(r,t)$, $\mathbf{B}(r,t)$: campo eléctrico e inducción magnética, respectivamente, como función de la distancia ***r*** y el tiempo *t*.

**dA**: vectores infinitesimales normales a la superficie **sc**.

$q(t)$: carga eléctrica en función del tiempo.

$\varepsilon_0$: permitividad eléctrica en el vacío.

$\mu_0$: permeabilidad magnética en el vacío.

$i_c(t)$: corriente de conducción en función del tiempo.

**dl**: vectores infinitesimales tangentes a la curva **c.**

La nomenclatura para magnitudes escalares variables en el tiempo establece que las mismas se escriban con minúscula. Además, se indican con letra cursiva al simple efecto de distinguirlas del resto del texto. Para el caso de las magnitudes vectoriales, de uso en este libro, se usan letras mayúsculas en negrita y, para el caso del valor del módulo, no en negrita.

Las ecuaciones presentadas permiten determinar el valor, dirección y sentido tanto del campo eléctrico como del campo magnético en un punto del espacio. En el caso de la Ec. 1-1, el campo eléctrico es causado por las cargas eléctricas mientras que la Ec. 1-3 muestra que el campo eléctrico también puede ser determinado por la variación en el tiempo del campo de inducción magnética. Por otro lado la Ec. 1-2 indica que las líneas de inducción magnética son cerradas (ausencia de monopolos magnéticos) y por último la Ec. 1-4 permite concluir que el campo de inducción magnética es causado tanto por la corriente eléctrica de conducción como por la variación en el tiempo del campo eléctrico.

En el caso de considerar estos fenómenos en el vacío, es decir tanto sin carga eléctrica como de corriente de conducción y teniendo en cuenta que $\varepsilon_0 \cdot \mathbf{E} = \mathbf{D}$ y $\mu_0 \cdot \mathbf{H} = \mathbf{B}$, las ecuaciones anteriores se escriben como sigue:

$$\int_{sc} \mathbf{D}(r,t) \cdot \mathbf{dA} = 0 \qquad \text{Ec. 1-5}$$

$$\int_{sc} \mathbf{B}(r,t) \cdot \mathbf{dA} = 0 \qquad \text{Ec. 1-6}$$

$$\oint_{c} \mathbf{E}(r,t) \cdot \mathbf{dl} = -\mu_0 \cdot \int_{s} \frac{\delta \mathbf{H}(r,t)}{\delta t} \cdot \mathbf{dA} \qquad \text{Ec. 1-7}$$

$$\oint_{c} \mathbf{H}(r,t) \cdot \mathbf{dl} = \varepsilon_0 \cdot \int_{sc} \frac{\delta \mathbf{E}(r,t)}{\delta t} \cdot \mathbf{dA} \qquad \text{Ec. 1-8}$$

Un detalle, si se quiere notable, es que la Ec. 1-5 resulta idéntica a la Ec. 1-6 con sólo cambiar el campo eléctrico por el magnético. Y si se mantiene ese cambio, más el agregado de cambiar la permitividad eléctrica $\varepsilon_0$ por la permeabilidad magnética $\mu_0$, la Ec. 1-7 se transforma (a menos del signo negativo) en la Ec. 1-8. La explicación de lo mostrado es consecuencia de la característica complementaria de ambos campos y que permite que el eléctrico produzca un magnético y viceversa.

Puede decirse que los pares de ecuaciones tienen un comportamiento *dual*. Este concepto de *dualidad* se refiere a la "*existencia de dos caracteres o fenómenos distintos en una misma persona o en un mismo estado de cosas*", según la definición del diccionario de la DLE (Diccionario de la Lengua Española). Este aspecto se traslada a otros tipos de parámetros y magnitudes escalares, eléctricas y magnéticas. En definitiva, la idea es mantener la misma vinculación matemática para variables con comportamiento dual.

Por otra parte, partiendo de este segundo grupo de ecuaciones, puede deducirse la propagación de energía (función del espacio y el tiempo) como onda electromagnética. Dicha onda se propaga en el espacio a la velocidad $c = \left(\sqrt{\varepsilon_0 \cdot \mu_0}\right)^{-1}$ (en el vacío ó el aire) ó $c = \left(\sqrt{\varepsilon \cdot \mu}\right)^{-1}$ (en caso de un medio diferente) y con una frecuencia de oscilación fijada por la variación en el tiempo del campo que da origen a la onda en cuestión (el campo que generalmente inicia la onda electromagnética, como lo indica el inicio del apelativo, es el eléctrico). Además, esta velocidad se vincula con la frecuencia *f* y con la longitud de onda $\lambda$ con la siguiente fórmula $c = \lambda \cdot f$.

La Tabla 1-1 muestra ejemplos de señales, electromagnéticas y mecánicas, de diferente frecuencia ($f$), con el valor correspondiente del período ($T$) y de la longitud de onda ($\lambda$). También se indican distancias geográficas comparativas con los respectivos valores de $\lambda$.

**Tabla 1-1:** Ejemplos comparativos de señales

| Tipo de señal | $f$ | $T$ | $\lambda$ | Distancias comparativas |
|---|---|---|---|---|
| Transmisión de energía eléctrica | $50\ \text{Hz}$ | $20\ \text{ms}$ | $6000\ \text{km}$ | Ushuaia (Arg.)-Recife (Bra.) 5987 km |
| Vocal humana en español (promedio) | $1{,}75\ \text{kHz}$ | $0{,}57\ \text{ms}$ | $172\ \text{km}$ | La Plata-Dolores (ruta) 173 km |
| Nota musical aguda | $12\ \text{kHz}$ | $83{,}3\ \mu\text{s}$ | $25\ \text{km}$ | La Plata-Peaje Hudson (autovía) 25 km |
| Transmisión radial en AM (promedio) | $1\ \text{MHz}$ | $1\ \mu\text{s}$ | $300\ \text{m}$ | Cruce Plaza Moreno por Av. 13 295 m |
| Transmisión radial en FM (promedio) | $100\ \text{MHz}$ | $10\ \text{ns}$ | $3\ \text{m}$ | Diagonal habitación de 2x 2.4 $m^2$ 3,1 m |
| Transmisión de telefonía móvil | $850\ \text{MHz}$ | $1{,}17\ \text{ns}$ | $35\ \text{cm}$ | Triple decímetro (regla) 30 cm |

Si la geometría donde se inicia esta radiación de energía (dipolo radiante o antena) se caracteriza por una magnitud lineal $d_1$, dicha energía, y por unidad de tiempo, resulta directamente proporcional a $(d_1/\lambda)^2$.

Por otra parte, tanto para el dipolo radiante como para una línea de transmisión eléctrica o para una guía de onda, el tiempo $t$ en que tarda en llegar la energía a una distancia $d_2$ es igual a $(d_2/\lambda)T$.

Teniendo en cuenta lo anteriormente dicho, las Tablas 1-2, 1-3 y 1-4, muestran algunos ejemplos del valor de $d/\lambda$, $(d/\lambda)^2$ y $(d/\lambda)T$ para tres frecuencias diferentes y distintos valores de $d$.

**Tabla 1-2:** Ejemplos comparativos con $f = 50\ \text{Hz}$ $T = 20\ \text{ms}$ $\lambda = 6000\ \text{km}$

| $d$ | Distancias comparativas | $d/\lambda$ | $(d/\lambda)^2$ | $t$ |
|---|---|---|---|---|
| 600 km | CABA-Bahía Blanca 574 km | 0,1 | $10^{-2}$ | 2 ms |
| 60 km | CABA-La Plata 52 km | 0,01 | $10^{-4}$ | 0,2 ms |
| 6 km | Desde Av. 32 a Av. 72 en La Plata 5,2 km | 0,001 | $10^{-6}$ | 200 $\mu$s |
| 600 m | 4,5 cuadras en La Plata 580 m | 0,0001 | $10^{-8}$ | 20 $\mu$s |
| 60 m | Media cuadra en La Plata 60 m | 0,00001 | $10^{-10}$ | 2 $\mu$s |
| 6 m | Diagonal habitación de 3,3 x 5 $m^2$ 6 m | 0,000001 | $10^{-12}$ | 200 ns |

**Tabla 1-3:** Ejemplos comparativos con $f = 10\,k\text{Hz}\ \ T = 100\,\mu\text{s}\ \ \lambda = 30\,\text{km}$

| $d$ | **Distancias comparativas** | $d/\lambda$ | $(d/\lambda)^2$ | $t$ |
|---|---|---|---|---|
| 3 m | Diagonal habitación de 2 x 2.4 $m^2$ <br> 3,1 m | 0,0001 | $10^{-8}$ | 10 ns |
| 30 cm | Triple decímetro (regla) <br> 30 cm | 0,00001 | $10^{-10}$ | 1 ns |
| 3 cm | Diagonal de una placa de 9 $cm^2$ <br> 3 cm | 0,000001 | $10^{-12}$ | 0,1 ns |

**Tabla 1-4:** Ejemplos comparativos con $f = 100\,\text{MHz}\ \ T = 10\,\text{ns}\ \ \lambda = 3\,\text{m}$

| $d$ | **Distancias comparativas** | $d/\lambda$ | $(d/\lambda)^2$ | $t$ |
|---|---|---|---|---|
| 30 cm | Triple decímetro (regla) <br> 30 cm | 0,1 | $10^{-2}$ | 1 ns |
| 3 cm | Diagonal de una placa de 9 $cm^2$ <br> 3 cm | 0,01 | $10^{-4}$ | 0,1 ns |

Es obvio que para $d/\lambda << 1$, la radiación es despreciable y la transmisión de energía se puede considerar instantánea.

En estas condiciones geométricas, las Ec. 1-1 y 1-2 resultan:

$$\int_{\mathbf{sc}} \mathbf{D}(t) \cdot \mathbf{dA} = q(t) \qquad \text{Ec. 1-9}$$

por ser $\varepsilon_0 \cdot \mathbf{E} = \mathbf{D}$

Si la superficie no es cerrada

$$\int_{\mathbf{s}} \mathbf{B}(t) \cdot \mathbf{dA} = \phi(t) \qquad \text{Ec. 1-10}$$

Para el caso de la Ec. 1-3, $d/\lambda << 1$ determina que el campo eléctrico prácticamente no genere un campo magnético y viceversa. Entonces, y si se considera un camino no cerrado para la integral curvilínea de $\mathbf{E}$, ésta sólo depende de la diferencia de los potenciales eléctricos en los extremos del camino.

$$\int_b^a \mathbf{E}(t) \cdot \mathbf{dl} = V_b(t) - V_a(t) \qquad \text{Ec. 1-11}$$

En la Ec. 1-11, $V$ es el potencial eléctrico[1] en cada uno de los puntos $a$ y $b$. La diferencia de ambos potenciales, en lo sucesivo, se denominará *tensión eléctrica* y se indicará con $u(t)$ cómo esta prioritariamente normalizado según se explica en el apéndice sobre nomenclatura.

En definitiva la ecuación queda:

$$\int_b^a \mathbf{E}(t) \cdot \mathbf{dl} = u(t) \qquad \text{Ec. 1-12}$$

[1] Otra indicación de funciones potenciales que suele hacerse es con la letra $\phi$. Por otro lado esta letra griega también corresponde a al flujo magnético que es la usada en el Capítulo 5.

Por último, con las mismas consideraciones respecto a $d/\lambda << 1$, la Ec. 1-4 depende sólo de la corriente de conducción que, por ser la única, no requiere el subíndice identificativo. Además, por ser $\mu_0 \cdot \mathbf{H} = \mathbf{B}$, el resultado final es:

$$\oint_{\mathbf{c}} \mathbf{H}(t) \cdot \mathbf{dl} = i(t) \qquad \text{Ec. 1-13}$$

Un detalle importante a tener en cuenta en las ecuaciones resultantes es que éstas involucran parámetros vectoriales en las integrales (diferentes manifestaciones del campo electromagnético), pero con resultados finales escalares.

Si las condiciones geométricas particulares además determinan que $\mathbf{E}$ y $\mathbf{D}$ sean uniformes (lo que sucede para porciones de espacio pequeñas y limitadas) entonces ambos campos se pueden representar por sus módulos e indicados *no en negrita*, como ya se anticipara.

Para el campo eléctrico, un ejemplo esquemático podría ser el de la Figura 1-1, propio de un componente concentrado.

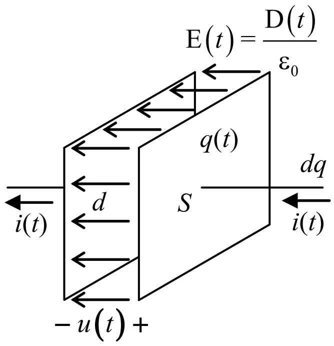



**Figura 1-1:** Ejemplo de componente concentrado representativo del campo eléctrico

En consecuencia resulta de la Ec. 1-9

$$\mathrm{E}(t) \cdot S = \frac{q(t)}{\varepsilon_0} \qquad \text{Ec. 1-14}$$

Y de la Ec. 1-12

$$u(t) = \mathrm{E}(t) \cdot d \qquad \text{Ec. 1-15}$$

La eliminación de $\mathrm{E}(t)$ entre las Ec. 1-14 y 1-15 determina la definición de la *capacitancia C:*

$$C = \frac{q(t)}{u(t)} = \frac{\varepsilon_0 \cdot S}{d} \qquad \text{Ec. 1-16}$$

La Ec. 1-16 queda sólo en función de $q(t)$ y $u(t)$, ambos escalares y donde el último parámetro se puede caracterizar como una *variable de salto*. Se volverá sobre esta última denominación al momento de estudiar potencia y energía eléctrica al final del Capítulo 2.

Si las condiciones geométricas, como por ejemplo las de la Figura 1-2, imponen que $\mathbf{H}$ y $\mathbf{B}$ sean uniformes, entonces los mismos también se pueden representar por sus módulos.

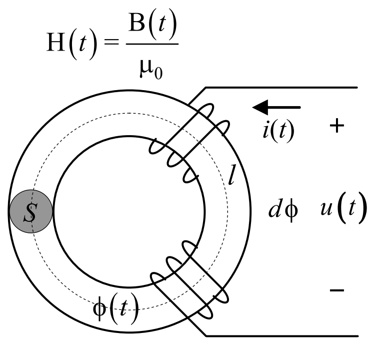



**Figura 1-2:** Ejemplo de componente concentrado representativo del campo magnético

En consecuencia resulta de la Ec. 1-10

$$\mathrm{H}(t)\cdot S=\frac{\phi(t)}{\mu_0} \qquad \text{Ec. 1-17}$$

Y de la Ec. 1-13

$$i(t)=\mathrm{H}(t)\cdot l \qquad \text{Ec. 1-18}$$

En este caso la eliminación de $\mathrm{H}(t)$ entre las Ec. 1-17 y 1-18 da cuenta de la definición de *inductancia* $L$:

$$L=\frac{\phi(t)}{i(t)}=\frac{\mu_0\cdot S}{l} \qquad \text{Ec. 1-19}$$

La Ec. 1-19 queda sólo en función de $\phi(t)$ e $i(t)$, ambos escalares y donde el último parámetro se puede caracterizar como una *variable de paso*. También se volverá sobre esta última denominación al momento de estudiar potencia y energía eléctrica al final del Capítulo 2.

Nuevamente puede apreciarse la característica dual del grupo de ecuaciones 1-14 a 1-16 respecto del grupo 1-17 a 1-19, indicándose en la Tabla 1-5 las semejanzas de los parámetros involucrados.

**Tabla 1-5:** Dualidad de los parámetros de las Ec. 1-4 a 1-9

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $u(t)$ | $q(t)$ | $C$ | $\varepsilon_0$ | $\mathrm{E}(t)$ |
| $i(t)$ | $\phi(t)$ | $L$ | $\mu_0$ | $\mathrm{H}(t)$ |

Por otra parte considerando $dq=i\cdot dt$, correspondiente a la definición de *corriente*, y $d\phi=u\cdot dt$, a partir de la ley de Faraday, la parte izquierda de las Ec. 1-16 y 1-19 se transforman en:

$$u(t)=\frac{1}{C}\cdot\int i(t)\cdot dt \qquad \text{Ec. 1-20}$$

para la capacitancia, y

$$i(t)=\frac{1}{L}\cdot\int u(t)\cdot dt \qquad \text{Ec. 1-21}$$

para la inductancia.

Las Ec. 1-20 y 1-21 se conocen como las *relaciones constitutivas dinámicas* para los elementos caracterizados sólo por la *capacitancia* $C$ y para los elementos caracterizados sólo

por la *inductancia* $L$, respectivamente, representativos de los campos eléctrico y magnético como elementos de circuito.

El requerimiento de una integral respecto del tiempo significa "necesidad de *historia*" es decir "pasado" para causar "futuro". La integral suma los sucesivos estados de la causa $i(t)$ ó $u(t)$ para producir la consecuencia $u(t)$ ó $i(t)$ en $C$ y $L$, respectivamente.

Queda una situación en la que las consecuencias eléctricas o magnéticas no requieren de la "historia". Es decir la causa $i(t)$ ó $u(t)$ produce el efecto $u(t)$ ó $i(t)$ en forma *instantánea* o, lo que es lo mismo, ambos juegos de causa/efecto son proporcionales. El primer antecedente es la *ley de Ohm*, a partir de la cual que definió la *resistencia* $R$ cuya inversa, en su formulación original, resulta justamente el factor de proporcionalidad, tal cual lo muestra la siguiente relación:

$$i(t) = \frac{u(t)}{R} \qquad \text{Ec. 1-22}$$

En este caso la causa es $u(t)$ y la consecuencia $i(t)$ pero, un simple pase de términos matemáticos, genera una versión dual con la definición de la característica inversa de $R$, es decir, la *conductancia* $G$.

$$u(t) = \frac{i(t)}{G} \qquad \text{Ec. 1-23}$$

Las Ec. 1-22 y 1-23 son las *relaciones constitutivas estáticas* para los elementos caracterizados tanto por la *resistencia* $R$ como por la *conductancia* $G$

Una síntesis de estas relaciones, expresadas en las Ec. 1-16 a 1-19, y 1-20 a 1-23, es el *tetraedro de Paynter*, mostrado en la Figura 1-3, que vincula: $q$, $\phi$, $u$ e $i$.

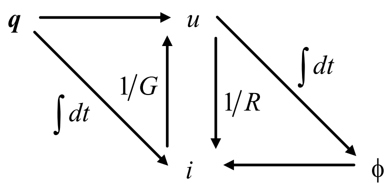



**Figura 1-3:** Tetraedro de Paynter

## 1.2 Bibliografía


"Apuntes de electricidad y magnetismo". Prof. A. Paola. Cátedra de Física II, Facultad de Ingeniería, UNLP.

# CAPÍTULO 2
# Introducción al análisis de circuitos

Se estudian y definen con detalle los elementos que conforman un circuito eléctrico y con los cuales es posible la elaboración de modelos de funcionamiento definiendo qué es un *modelo*.

Se presentan las leyes de Ohm y Kirchhoff y ejemplos de análisis de circuitos

Luego, se repasa potencia y energía y como se aplica en los circuitos eléctricos con correcto uso de sus respectivos significados.

A continuación se introducen algunos elementos básicos para la medición de las magnitudes eléctricas, como son el *voltímetro* y el *amperímetro*, Con relación al voltímetro y el amperímetro, se estudian los métodos de medición de resistencias mediante estos instrumentos.

Finalmente, se progresa en la comprobación del concepto de dualidad para su uso en el Capítulo 3.

## 2.1 Capacitor, inductor y resistor

A partir del análisis presentado en el Capítulo 1, las capacitancia, inductancia y resistencia dan lugar a componentes de circuito definidos como elementos de dos extremos, *terminales*, *bornes* o *polos* entre los cuales se aplica la tensión, o por los cuales se establece la corriente entrando las cargas por uno de dichos extremos y saliendo por el otro. Estos elementos suelen denominarse *dipolo* (estrictamente *dipolo eléctrico*) y sólo se manifiestan cuando se le aplica tensión o corriente[2], por lo cual se los clasifica como *dipolo pasivo*, a su vez *reactivo* para el *capacitor* y el *inductor*, y *no reactivo* para el *resistor*.

La representación simbólica de los tres elementos, denominación, característica y unidades se muestra en la Figura 2-1.

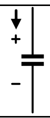
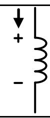
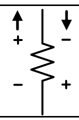
| Elemento |  |  |  |
|---|---|---|---|
| Símbolo | $C$ | $L$ | $R$<br>$G$ |
| Denominación | Capacitor | Inductor | Resistor |
| Característica | Capacitancia | Inductancia | Resistencia<br>Conductancia |
| Unidad | F | H | Ω<br>S |
| Denominacion unidad | farad | henry | ohm<br>siemens |

**Figura 2-1:** Representación simbólica de los elementos, denominación, característica y unidades

También en la Figura 2-1 se indican para cada componente, el sentido de la corriente y la polaridad de la tensión resultante, pudiendo ser la corriente causa de la tensión o viceversa.

Alcanzado este punto es interesante tener en cuenta algunas cuestiones propias de la nomenclatura que se amplía en el Apéndice A. Por caso, el elemento de circuito tangible se denomina *capacitor* y su característica física es la *capacitancia*. De la misma forma, la característica del elemento *inductor* es la *inductancia*; y la característica del *resistor* es la *resistencia* o *conductancia* (la razón de estas dos características se explica más adelante). Esta aclaración es válida, dado que es muy común que se confunda el nombre del elemento con el nombre de su característica física, asignando indistintamente uno y otro en forma incorrecta.

Por otra parte con estos elementos o componentes, y los que se irán presentando, se usan para *modelar* los circuitos eléctricos que en el Capítulo 3 se detallará como estudiarlos y resolverlos.

[2] Sólo cuando el elemento es sometido a la aplicación de una tensión o una corriente (o *excitación*), y en función de la *respuesta* a dicha excitación, recién es posible entender de qué tipo de elemento pasivo de circuito se trata.

Por *modelo* (para *modelar*), el Diccionario de la Lengua Española, en sus acepciones 3ª y 4ª, lo define como “representación en pequeño de alguna cosa” y “esquema teórico, generalmente en forma matemática, de un sistema o de una realidad compleja que se elabora para facilitar su comprensión y el estudio de su comportamiento”, respectivamente. El Apéndice B se desarrolla el concepto; ilustrándolo con algunos ejemplos

## 2.2 Características de transferencia de los elementos pasivos de circuito

Es posible representar gráficamente las variables eléctricas y magnéticas que se relacionan para definir las características físicas de los elementos de circuito, de acuerdo a las expresiones de las Ec. 1-16, 1-19, 1-22 y 1-23. En los párrafos que siguen se desarrolla esta idea, dando lugar a lo que se conoce como *características de transferencia de los elementos pasivos de circuito*, mediante las cuales se pueden visualizar las relaciones causa/efecto sobre cada elemento.

### 2.2.1 Capacitancia e inductancia

Para el caso de los dos componentes reactivos, las características de transferencia vinculan $Q/U$ y $\Phi/I$ en el capacitor y el inductor, respectivamente. Las Figuras 2-2 y 2-3 muestran esta situación. También se aprecia que la característica es lineal y pasa por el origen, es decir que ante causas de $U$ o $I$ nulas las consecuencias reactivas $Q$ o $\Phi$ también son nulas.

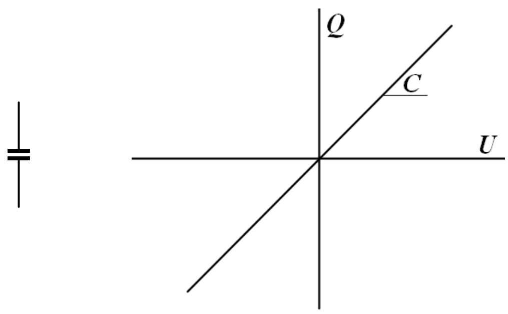



**Figura 2-2:** Característica de transferencia de un capacitor

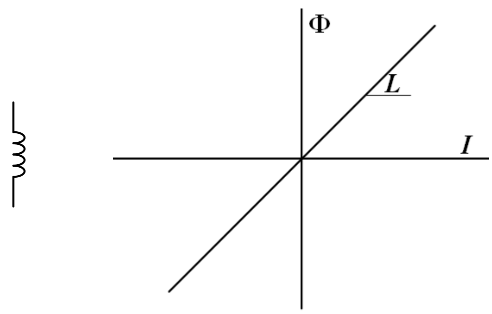


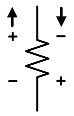

**Figura 2-3:** Característica de transferencia de un inductor

Pasar por el origen es propio del carácter pasivo del componente, lo cual significa que si el elemento no se *activa*, el mismo no se manifiesta.

Respecto a la característica $U$ vs $I$ o $I$ vs $U$ en estos elementos, las ecuaciones constitutivas muestran que dicha relación implica integrales o derivadas que dependen del tiempo y los detalles sobre el particular se verán más adelante.

### 2.2.2 Resistencia y conductancia - Ley de Ohm

En particular, la relación causa/efecto en el elemento no reactivo resistor puede verse e en gráficos $U$ vs $I$ o $I$ vs $U$ lo que determina las características $R$ y $G$ como se aprecia en las Figura 2-4 y 2-5.



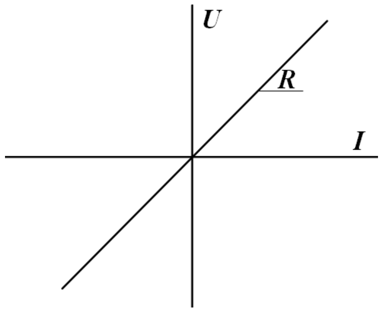



**Figura 2-4:** Característica de transferencia del resistor (*resistencia*)

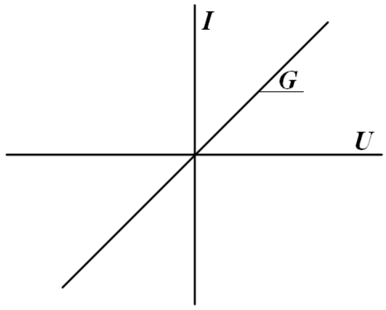



**Figura 2-5:** Característica de transferencia del resistor (*conductancia*)

Al igual que en caso del capacitor y del inductor, estas características son rectas que pasan por el origen con las mismas implicancias vistas y cuya pendiente es la característica $R$ o $G$, según el caso.

Puede verificarse que ambas características surgen de la *ley de Ohm* y observando las expresiones de las Ec. 2-1, derivadas de dicha ley, se comprueba que $R = G^{-1}$.

$$R = \frac{U}{I} \qquad\qquad G = \frac{I}{U} \qquad\qquad \text{Ec. 2-1}$$

En la sección siguiente se ampliarán algunas ideas referidas a la resistencia, al resistor y algunas características adicionales, en particular, vinculadas a los materiales con los que se construyen estos elementos.

### 2.2.2 Resistencia - Resistividad - Resistor

La *resistencia* eléctrica de un conductor, generalmente constituido por un alambre metálico, aunque a veces puede tener otras formas y estar fabricado con otros materiales, es una propiedad que depende de la *resistividad* del material y de la geometría del conductor, es decir de su longitud y del área de la sección del alambre. Si la sección es constante a lo largo del tramo de conductor analizado y la estructura del material resulta homogénea, la resistencia se expresa de acuerdo con la fórmula

$$R = \rho \frac{l}{A} \qquad\qquad \text{Ec. 2-2}$$

en la que

$R$: resistencia del conductor en [$\Omega$]

$l$: longitud del alambre en [m]

$A$: área de la sección del conductor en [$m^2$]

$\rho$: resistencia especifica o resistividad en [$\Omega \cdot m$]

Como ya se vio en párrafos anteriores y se explica en el Apéndice A sobre nomenclatura, el símbolo $\Omega$ se llama *ohm* en honor al físico alemán Georg Simon Ohm.

El factor $\rho$ (letra griega *rho*) permite comparar diferentes materiales en cuanto a su resistencia según su naturaleza sin que intervengan la longitud ni el área. Los valores de $\rho$ más grandes dan lugar a conductores con mayor resistencia.

El *coeficiente de variación de la resistividad con la temperatura* $\alpha$ (letra griega *alfa*), indica qué tanto varía la resistividad con el cambio de la temperatura. Un valor positivo de $\alpha$ indica que $\rho$ aumenta con la temperatura; un $\alpha$ negativo significa que $\rho$ disminuye al aumentar la temperatura; un $\alpha$ igual a cero significa que $\rho$ es constante, que no varía al cambiar la temperatura. Aunque para cierto material $\alpha$ puede variar ligeramente con la temperatura, el aumento en la resistividad del material producido por una elevación de la temperatura puede determinarse aproximadamente por medio de la ecuación

$$\rho_{t_2} = \rho_{t_1} + \alpha(t_2 - t_1) \qquad \text{Ec. 2-3}$$

en la que

$\rho_{t_1}$ : resistividad a la temperatura $t_1$ en $[\Omega \cdot \mathrm{m}]$

$\rho_{t_2}$ : resistividad a la temperatura $t_2$ en $[\Omega \cdot \mathrm{m}]$

$\alpha$ : coeficiente de variación de la resistencia con la temperatura en $[\Omega \cdot \mathrm{m/K}]$

$t_1$ : temperatura de referencia, correspondiente a $\rho_{t_1}$ en [ºC]

La Tabla 2-1 muestra valores de resistividad y coeficiente de variación de $\rho$ con la temperatura para varios materiales.

**Tabla 2-1:** $\rho$ y $\alpha$ para diferentes materiales

| **Material** | $\rho$ $[\Omega \cdot \mathrm{m}]$ | $\alpha$ $[\Omega \cdot \mathrm{m/K}]$ |
|---|---|---|
| Cobre puro | $17,\ 3 \cdot 10^{-9}$ @ $t_1 = 21{,}85$ ºC | $68{,}0 \cdot 10^{-12}$ |
| Aluminio puro | $27{,}4 \cdot 10^{-9}$ @ $t_1 = 21{,}85$ ºC | $92{,}8 \cdot 10^{-12}$ |
| Carbono | $30$ a $600 \cdot 10^{-6}$ @ $t_1 = 20$ ºC | $-5{,}0 \cdot 10^{-12}$ |
| Constantán | $490 \cdot 10^{-9}$ @ $t_1 = 20$ ºC | $0{,}2 \cdot 10^{-12}$ |

Obsérvese que el *carbono* tiene un coeficiente de variación con la temperatura negativo. En general, $\alpha$ es negativo para todos los semiconductores como el germanio y el silicio. Un valor negativo de $\alpha$ significa que la resistencia es menor a temperaturas más altas. Por consiguiente, la resistencia de los diodos semiconductores y de los transistores puede disminuir considerablemente cuando se calientan. Obsérvese también que el *constantán* tiene un valor de $\alpha$ prácticamente igual a cero, por lo que se lo puede utilizar para resistores de precisión de alambre enrollado que casi no cambian el valor de la resistencia al variar la temperatura. Mas información sobre el particular puede consultarse en la referencia bibliográfica 1)

Como se mencionara oportunamente, la resistividad eléctrica es una propiedad de los materiales a partir de la cual surge, mediante la geometría dada al material en cuestión, la *resistencia*. Tal cual se afirmó en párrafos anteriores, un *resistor* es un componente de circuito eléctrico, el cual posee la característica denominada *resistencia*. Por lo tanto, no debe confundirse *resistencia* con *resistor*.

Estudiadas la resistencia y la resistividad eléctricas, la *conductancia* y la *conductividad* resultan las inversas de la resistencia y de la resistividad, respectivamente.

$$G = \frac{1}{R} \qquad \text{y} \qquad \sigma = \frac{1}{\rho} \qquad \text{Ec. 2-4}$$

Donde

$G$ : conductancia en [S]

$\sigma$ : conductividad en [S/m]

El símbolo S se llama *siemens*, en honor al ingeniero alemán Werner von Siemens.

## 2.3 Elementos activos

Cuando se estudian circuitos eléctricos, ya se vio que los elementos básicos que conforman los mismos se dividen en elementos pasivos y elementos activos.

Para que en estos elementos pasivos (capacitores, inductores y resistores) haya *tensión* o *corriente* se necesitan los elementos activos capaces de disponer de estos parámetros físicos.

Así se habla de *fuentes de tensión* y *fuentes de corriente*, y en los ítems que siguen se detallarán las características de las mismas con el objeto de conformar el punto de partida del estudio de los circuitos eléctricos.

### 2.3.1 Fuentes independiente ideales

Dejando para el final de este Capítulo los aspectos vinculados con la potencia y la energía, el concepto inicial importante es que la fuente debe suministrar la tensión o la corriente sin cambiar su valor, sean estas constantes o variables en el tiempo, sin importar que la misma esté o no conectada.

Este comportamiento conduce a la definición de la fuente de tensión ideal y fuente de corriente ideal como sigue.

Una *fuente de tensión* establece una tensión entre sus bornes, *independientemente* de la corriente presente entre ellos

De la misma forma, una *fuente de corriente* establece una corriente entre sus bornes, *independientemente* de la tensión entre los mismos.

Estos elementos representan las disponibilidades de tensión y de corriente reales existentes en la práctica, aclarando que en la realidad es más fácil disponer de equipos que suministren tensión que corriente (las fuentes ideales de corriente suelen *modelar* partes del circuito que se comportan como si fuera dicho suministro de corriente).

Las Figuras 2-6 y 2-7 presentan los símbolos de una fuente de tensión y una fuente de corriente ideales, respectivamente.

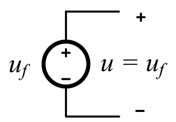



**Figura 2-6:** Fuente ideal de tensión

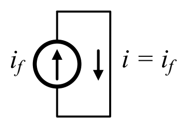



**Figura 2-7:** Fuente ideal de corriente

Obsérvese en la Figura 2-6 que la fuente de tensión se encuentra con sus bornes extremos *abiertos* (*circuito abierto*), es decir, no hay vinculación directa entre ellos. Ésto debe ser

así, pues un *cortocircuito* entre los mismos forzaría que la tensión fuese cero (esta condición estaría imponiendo que el potencial de uno de los bornes coincida con el del otro), contradiciendo así su definición. Nada impide que cualquier otro elemento de circuito sea conectado entre sus bornes, excepto el mencionado cortocircuito.

De igual manera, en la Figura 2-8 la fuente de corriente posee sus extremos unidos o en *cortocircuito*. Esto no puede ser de otra manera, dado que si así fuera y dichos extremos fuesen separados dando lugar a un *circuito abierto*, las cargas eléctricas no podrían circular entre los extremos o bornes de la fuente, anulando la corriente y contradiciendo su definición. Tampoco en este caso, cualquier otro elemento de circuito puede conectarse entre sus bornes, excepto el mencionado circuito abierto.

En la parte inicial del análisis de circuitos a desarrollar en el presente texto se va a tratar con circuitos *en régimen de corriente continua*, por lo cual resulta oportuno presentar las Figuras 2-8 y 2-9, las cuales muestran el comportamiento de las fuentes de tensión continua y de corriente continua ideales, respectivamente, en función del tiempo[3].

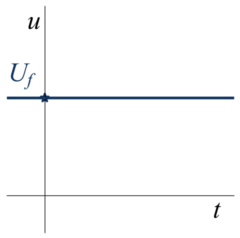



**Figura 2-8:** Comportamiento de una fuente ideal de tensión continua

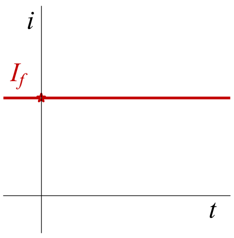



**Figura 2-9:** Comportamiento de una fuente ideal de corriente continua

Al conectar estas fuentes, la característica de *independiente* asignada a las mismas significa que una fija la tensión y la otra la corriente justamente independientemente de la corriente (en el primer caso) o la tensión (en el segundo) que el resto del circuito establezcan en ellas.

### 2.3.2 Fuentes dependientes o controladas

Se acaba de decir que una fuente *independiente* de tensión o de corriente, establece respectivamente una tensión o una corriente entre sus bornes que depende sólo de su valor intrínseco, y no se ve alterada por el valor se los restantes parámetros del circuito.

Por contraste, una fuente de tensión o de corriente dependiente proporciona respectivamente una tensión o una corriente cuyo valor *depende* del valor de la tensión o de la corriente existente en algún otra parte del circuito.

Por lo tanto, en una fuente *dependiente* no se puede especificar su valor, a menos que se conozca el valor de la variable de la cual depende. O sea al igual que los elementos pasivos, este tipo de fuente tiene sentido solamente conectada, teniendo que estar el circuito activo o lo que es lo mismo con por lo menos una fuente *independiente*. En ocasiones, las fuentes dependientes también se las denomina *fuentes controladas*.

[3] Como distinción adicional, en general en el resto del texto, la tensión será graficada con color azul y la corriente con color rojo

Las Figuras 2-10 y 2-11 presentan los símbolos respectivos de las dos posibles fuentes de tensión y de las dos posibles fuentes de corriente *dependientes*. El rectángulo representa el resto del circuito en el que se distingue la tensión o corriente de la que dependen las fuentes.

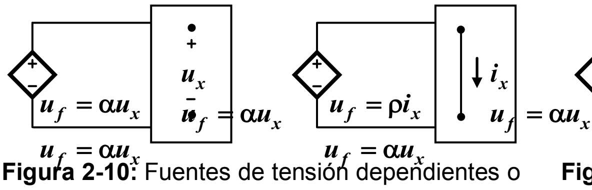


**Figura 2-10:** Fuentes de tensión dependientes o controladas

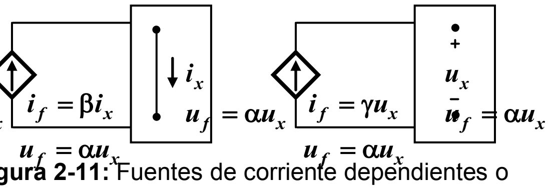


**Figura 2-11:** Fuentes de corriente dependientes o controladas

### 2.3.3 Fuentes reales

En la práctica, el comportamiento de las fuentes se aparta del ideal y por lo tanto se habla de *fuentes reales*. En circuitos de corriente continua, el funcionamiento de una fuente de tensión real se describe mediante la asociación de una fuente de tensión ideal y una resistencia en serie tal como muestra la Figura 2-12. De forma similar, una fuente de corriente real asocia una fuente de corriente ideal y una conductancia en paralelo, Figura 2-13.

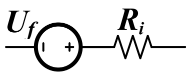


**Figura 2-12:** Fuente real de tensión

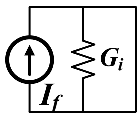


**Figura 2-13:** Fuente real de corriente

Estos modelos, si bien hacen menos sencillo el análisis del circuito, describen mejor el comportamiento de fuentes prácticas.

Continuando con el caso de continua, estas fuentes *reales* al ser conectadas se establecen corriente en la de tensión y tensión en la de corriente. Como consecuencia tanto la tensión como la corriente en las respectivas fuentes homónimas no se pueden mantener fijas. Una medida de esta característica es la *curva de carga* o *característica de regulación* de una fuente real. En el tratamiento del tema de la sección siguiente, como ejemplo de aplicación, se verá cómo se obtienen dichas curvas de regulación para cada una de las fuentes.

## 2.4 Leyes de Kirchhoff

Las leyes de Kirchhoff permiten el análisis de circuitos con referencia a las corrientes y tensiones en el mismo. Por esta razón, a veces se las conoce como *leyes universales* para el estudio de circuitos eléctricos.

Antes de comenzar el estudio de las leyes de Kirchhoff es conveniente y oportuno presentar algunas definiciones relacionadas con la *topología*[4] de circuitos. Demás está decir que el estudio de la topología de circuitos está fuera de los alcances de este texto, las definiciones siguientes pueden simplificar algunas ideas.

**Rama:** parte elemental de un circuito que une dos puntos del mismo dando lugar a un camino para la corriente.

**Nodo:** punto de un circuito al cual concurren dos o más ramas.

[4] Como definición general, la topología es la rama de las matemáticas dedicada al estudio de aquellas propiedades de los cuerpos geométricos que permanecen inalteradas por transformaciones continuas. En el caso de circuitos eléctricos, se refiere a la distribución y vinculación de los diferentes componentes en un circuito.

**Bucle o lazo:** cualquier trayectoria cerrada en un circuito, independientemente de lo sinuoso que sea, que no repite ninguna rama que lo compone.

**Malla:** bucle o lazo que no contiene otros lazos.

La Figura 2-14 se utiliza para ejemplificar las definiciones anteriores.

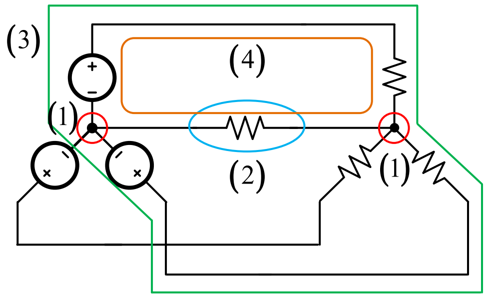



**Figura 2-14:** Ejemplos de: nodo (1), rama (2), bucle o lazo (3) y malla (4) en un circuito práctico real

### 2.4.1 Primera ley o ley de las corrientes

Se basa en el *principio de conservación de la carga eléctrica*.

Sea un grupo de corrientes concurrentes a un nodo, cuyos sentidos pueden ser entrantes y/o salientes del nodo, se puede afirmar que

| *La suma algebraica de las corrientes que concurren a un nodo vale cero* |
|---|

En forma abreviada, es conocida como *LKC*. Puede expresarse matemáticamente de diversas formas, según la conveniencia, como se indica a continuación

$$\sum_i i_i = 0 \qquad \text{Ec. 2-5}$$

Otra expresión válida de LKC resulta

$$\sum_j i_{fj} = \sum_k i_k \qquad \text{Ec. 2-6}$$

en la cual, $i_{fj}$ corresponde a corrientes *provenientes de fuentes* de corriente e $i_k$ a corrientes *en elementos pasivos* que concurren al nodo en cuestión. Estas últimas corrientes pueden expresarse en función de la tensión teniendo en cuenta las ecuaciones constitutivas de cada elemento pasivo (par el caso de la conductancia del resistor la versión de la ley de Ohm $i_k = u_k{\cdot}G_k$.

A los fines de un análisis ordenado, se asigna convencionalmente signo (+) a los sentidos entrantes y signo (-) a los salientes.

Otra expresión más

$$\sum_j i_{ej} = \sum_k i_{sk} \qquad \text{Ec. 2-7}$$

en la cual, $i_{ej}$ corresponde a sentidos de corrientes *entrantes* al nodo e $i_{sk}$ a sentidos de corrientes *salientes* del nodo. En este caso debe entenderse que las corrientes a ambos lados del signo igual son todas positivas o todas negativas.

### 2.4.2 Segunda ley o ley de las tensiones

Se basa en el *principio de conservación de la energía*.

Sea la malla de un circuito que se recorre en sentido arbitrario a partir de un punto, también arbitrario, hasta completar su recorrido al alcanzar el punto de partida, se puede afirmar que

| *La suma algebraica de las tensiones de los elementos de una malla vale cero* |
|---|

En forma abreviada, es conocida como *LKT*. Al igual que la *LKC*, puede expresarse matemáticamente de diversas formas, según la conveniencia

$$\sum_i u_i = 0 \qquad \text{Ec. 2-8}$$

o

$$\sum_j u_{fj} = \sum_k u_k \qquad \text{Ec. 2-9}$$

en la cual, $u_{fj}$ se refieren a tensiones *de fuentes* de tensión y $u_k$ a tensiones *de elementos pasivos* de la malla en cuestión. Estas últimas tensiones pueden expresarse en función de la corriente teniendo en cuenta las ecuaciones constitutivas de cada elemento pasivo (para el caso de la resistencia del resistor la versión de la ley de Ohm $u_k = i_k \cdot R_k$.

A los fines de un análisis ordenado, se suman convencionalmente las tensiones cuya polaridad aumenta con el sentido de recorrido y se restan aquéllas cuya polaridad disminuye con el sentido de recorrido.

Otra expresión

$$\sum_j u_{pj} = \sum_k u_{nk} \qquad \text{Ec. 2-10}$$

en la cual, $u_{pj}$ corresponde a tensiones cuya polaridad aumenta con el sentido de recorrido de la malla y $u_{nk}$ a tensiones con polaridad disminuyendo con el sentido de recorrido. En este caso debe entenderse que las tensiones a ambos lados del signo igual son todas positivas o todas negativas.

### 2.4.3 Ejemplos de aplicación de las leyes de Kirchhoff

#### 2.4.3.1 Curvas de regulación de las fuentes de tensión y corriente reales

Como ya se comentó en la sección 2-3-3, cuando una fuente de tensión real o una fuente de corriente real están conectadas a otro circuito aparecerá corriente en la primera y tensión en la segunda. Según la magnitud de dicha corriente la tensión en la fuente real tiene diferente valor y lo mismo sucede según el valor de la tensión en la fuente de corriente real.

La anterior afirmación, cuyo resultado es la ya mencionada curva de regulación de la fuente, puede comprobarse simplemente conectando un resistor de diferente valor a cada una de las fuentes. Con el orden numérico de las leyes de Kirchhoff se presenta primero el ejemplo de la fuente real de corriente en el que se considera el resistor conectado en paralelo por su conductancia. Segundo se analiza la fuente real de tensión con un resistor en serie caracteri-

zado por su resistencia. Lo descripto visto para corriente continua se sintetiza en los circuitos de las Figuras 2-15 y2-16.

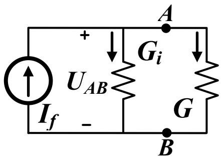



**Figura 2-15:** Fuente real de corriente conectada a una carga $G$

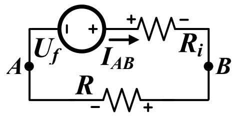



**Figura 2-16:** Fuente real de tensión conectada a una carga $R$

La simple aplicación de la *LKC* en el Nodo $A$ en el ejemplo del circuito de la Figura 2-15 da $I_f = I_{Gi} + I_G$. Teniendo en cuenta lo dicho al final del párrafo después de la Ec. 2-6, la anterior puede escribirse $I_f = U_{AB} \cdot G_i + I_G$ y operando finalmente resulta:

$$I_G = I_f - U_{AB} \cdot G_i \qquad \text{Ec. 2-11}$$

Con igual procedimiento, que podría realizar el lector, aplicando la *LKT* al circuito de la Figura 2-16 se obtiene:

$$U_R = U_f - I_{AB} \cdot R_i \qquad \text{Ec. 2-12}$$

Tan tanto la Ec. 2-11 como la Ec. 2-12 tienen el formato de la ecuación de una recta de pendiente negativa que no pasa por el origen y representan las curvas de regulación de cad fuente.

La Figura 2-17 muestra el caso de la fuente de corriente real. La corriente $I_G$ en ordenadas corresponde a la corriente en bornes de la fuente real en función de la tensión que requiere $G$ , $U_{AB}$. Los puntos singulares donde la recta corta a los ejes coordenados son: $I_{Gcc}$,“corriente de cortocircuito” para $G = \infty$ y $U_{ABca}$,“tensión de circuito abierto” para $I_G = 0$. Los valores de estos dos parámetros se obtienen fácilmente de la Ec. 2-11.

La Figura 2-18 muestra el resultado para la fuente de tensión real cuyos detalles se dejan nuevamente para la consideración del lector.

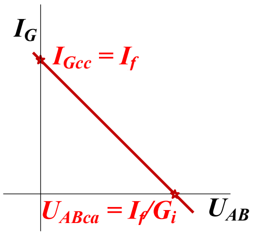



**Figura 2-17:** Curva de regulación para una fuente real de tensión

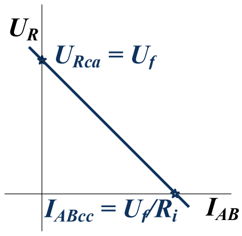



**Figura 2-18:** Curva de regulación para una fuente real de corriente

### 2.4.3.2 Circuito con fuente de tensión y fuente de corriente

Se presenta un ejemplo a lo largo del cual se destacan las convenciones más difundidas que permiten un análisis evitando los errores más comunes y además se realizan sugerencias para una resolución ordenada.

El ejemplo en cuestión propone determinar las ecuaciones que surgen de analizar mediante la aplicación de las leyes de Kirchhoff al circuito de la Figura 2-19.

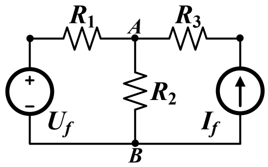



**Figura 2-19:** Circuito propuesto para aplicar las leyes de Kirchhoff

En el circuito se suponen conocidos los valores de las fuentes y de las resistencias, con lo cual el objeto del problema consiste en determinar las corrientes y tensiones restantes. En este sentido, mediante una inspección visual del circuito, es posible determinar que las incógnitas del problema son las corrientes en $U_f$ (misma que en $R_1$) y en $R_2$ y las tensiones en $R_1$, $R_2$, $R_3$ y en $I_f$, es decir *seis* incógnitas. Dado que, conocidas las corrientes, las tensiones en las resistencias se pueden determinar mediante la ley de Ohm y viceversa, las incógnitas se reducen a tres: corrientes en $R_1$ y $R_2$ y tensión en $I_f$.

Antes de iniciar cualquier planteo es conveniente estimar los sentidos de las corrientes y polaridades de las tensiones. Es evidente que la polaridad de $U_f$ y el sentido de $I_f$ están impuestos por las respectivas fuentes; por lo tanto, resulta obvio que la corriente en $R_3$ va de derecha a izquierda. Respecto de las demás corrientes, los sentidos muchas veces se establecen en forma arbitraria, aunque es una práctica extendida suponer que las fuentes de tensión fijan sentidos de la corriente saliendo por su borne positivo; siendo así, en el ejemplo de la Figura 2-23, se puede asignar a la corriente por $R_1$ el sentido de izquierda a derecha. Finalmente y, con las anteriores asignaciones de sentido, el sentido de la corriente por $R_2$ debería ser de arriba hacia abajo (resultado bastante lógica como consecuencia de la LKC, como se verá). Además, resulta de utilidad identificar los nodos del circuito.

Con lo dicho, la Figura 2-19 se puede modificar como indica la Figura 2-20.

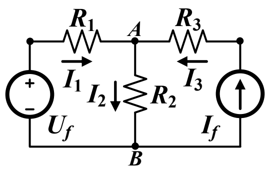



**Figura 2-20:** Circuito del ejemplo con la asignación de los sentidos de las corrientes e identificación de los nodos.

Como se anticipara, la corriente $I_3$ es igual la corriente de la fuente $I_f$, la cual impone su valor en dicha rama.

En este punto se considera importante mencionar las consecuencias que surgen a partir de los sentidos planteados de las corrientes respecto de las polaridades de las tensiones. Convencionalmente, se determina que la polaridad de la tensión resulta positiva en el borne del elemento pasivo por el cual ingresan las cargas al mismo. Esto se muestra en la Figura 2-21 con los signos positivo y negativo. Se verá que esta asignación de polaridades simplificará y ordenará el planteo de las LKT.

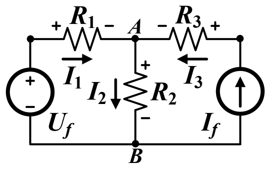



**Figura 2-21:** Circuito del ejemplo con la asignación de los sentidos de las corrientes, identificación de los nodos y asignación de las polaridades de las tensiones en los elementos pasivos.

Ahora, con toda la información disponible, se procederá al planteo de LKC y LKT.

Observando que existen dos nodos en el circuito, $A$ y $B$, y que $I_3=I_f$, es posible plantear dos ecuaciones de LKC, por lo cual en base a la Ec. 2-6 resulta en el nodo $A$

$$I_1 + I_f = I_2 \qquad \text{Ec. 2-13}$$

De la misma forma, en el nodo $B$

$$I_2 = I_1 + I_f \qquad \text{Ec. 2-14}$$

Como puede observarse claramente, las Ec. 2-13 y 2-14 son las mismas; es decir que el circuito tiene dos nodos pero sólo uno es *independiente*, lo cual significa que no es necesario plantear la LKC en *todos* los nodos de un circuito. Esta idea se puede generalizar a un circuito de $N$ nodos afirmando que

| *en un circuito de $N$ nodos, sólo son necesarias $N$-1 ecuaciones de LKC* |
|---|

Seguidamente se aplicará la LKT en todos las mallas del circuito. Al inspeccionar el mismo, se advierte que existen tres lazos; uno a la izquierda, compuesto por $U_f$, $R_1$ y $R_2$, otro a la derecha, compuesto por $R_2$, $R_3$ e $I_f$ y otro exterior, formado por $U_f$, $R_1$, $R_3$ e $I_f$.

Si el análisis se inicia en la malla de la izquierda, se puede escribir en base a la Ec. 2-10

$$U_f = R_1 I_1 + R_2 I_2 \qquad \text{Ec. 2-15}$$

Para la malla de la derecha, también en base a la Ec. 2-10

$$U_{If} = R_3 I_f + R_2 I_2 \qquad \text{Ec. 2-16}$$

Debe prestarse atención que en la Ec. 2-16, el signo del término $U_{If}$ se ha supuesto positivo en el borne por el cual salen las cargas de la fuente de corriente.

Para la malla exterior, nuevamente en base a la Ec. 2-10, se tiene

$$U_f = R_1 I_1 - R_3 I_f + U_{If} \qquad \text{Ec. 2-17}$$

Queda como ejercicio para el lector, verificar que si se introduce la Ec. 2-16 en la Ec. 2-17, se obtiene la Ec. 2-15. Ésto significa que una de las tres ecuaciones de LKT es combinación de las otras dos. En efecto, no es necesario plantear las ecuaciones de los tres lazos. Por lo tanto, se puede afirmar que existe un número de lazos *independientes*, que dan lugar a sendas ecuaciones de LKT independientes. Observando el circuito es posible hallar dichos lazos independientes, recordando la definición de *malla*, a partir de lo cual dichos lazos independientes son las mallas del circuito.

En resumen, recordando que el circuito presentaba tres incógnitas, las tres ecuaciones necesarias para la resolución son las Ec. 2-14, 2-15 y 2-16.

#### 2.4.3.3 Puente de Wheatstone

El puente de Wheatstone es un circuito típico que se utiliza básicamente para medir pequeños cambios en valores de resistencias, por lo cual es muy utilizado en especialidades de la ingeniería como la instrumentación y la mecatrónica. El mismo circuito, con algunas variantes, se puede utilizar para medir resistencias de resistores y otros elementos con una *repetibilidad* muy grande y una *incertidumbre* muy pequeña. No es objeto de este apartado desarrollar una teoría sobre mediciones con el puente de Wheatstone, pero sí efectuar un análisis del circuito con cierto nivel de detalle en base a un análisis mediante las leyes de Kirchhoff.

El puente de Wheatstone en su configuración y disposición típica se muestra en la Figura 2-22. La Figura 2-23 muestra una modificación del dibujo del circuito que se considera más conveniente para el análisis.

El objetivo de la resolución del circuito es obtener la *tensión de salida* $U_{AB}$ en función de la tensión de la fuente y del valor de las resistencias.

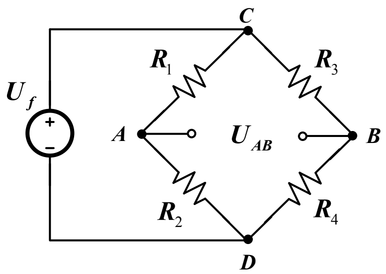



**Figura 2-22:** Disposición típica del puente de Wheatstone

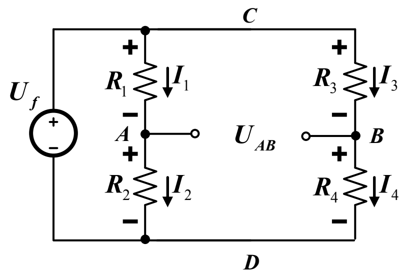



**Figura 2-23:** Disposición más conveniente del puente de Wheatstone para su análisis

Antes de iniciar el análisis, resulta conveniente echar un vistazo general al circuito con el fin de reconocer los elementos componentes, su distribución y el objetivo final de la resolución.

Es práctica habitual en el análisis de circuitos designar un nodo como referencia para la tensión. En este caso se puede designar al nodo $D$ como referencia, es decir, asignando tensión cero a dicho nodo.

Debe observarse que la tensión $U_{AB}$ puede expresarse como la diferencia entre $U_{AD}$ y $U_{BD}$. Se define de esta forma que el potencial del punto $A$ es mayor que la del punto $B$. Asimismo, cada una de estas tensiones pueden estar referidas a cualquier otro punto del circuito, pero por comodidad y conveniencia dicha referencia puede ser el nodo $D$ elegido; por lo tanto

$$U_{AB} = U_{AD} - U_{BD} \qquad \text{Ec. 2-18}$$

Ahora, para el cálculo de $U_{AD}$ y $U_{BD}$ en la Ec. 2-18 es preciso conocer las corrientes $I_2$ e $I_4$, para luego por ley de Ohm determinar las tensiones buscadas.

Asimismo, y dado que las corrientes son desconocidas, se puede seguir observando el circuito para descubrir que $I_2 = I_1$ y que $I_4 = I_3$, de manera que se puede escribir $I_2 = I_1 = I_{12}$ *e* $I_4 = I_3 = I_{34}$.

A su vez, cada una de estas corrientes se puede calcular por ley de Ohm, teniendo en cuenta que la tensión de la fuente $U_f$ está aplicada sobre cada una de las ramas serie existentes entre $C$ y $D$, pudiéndose escribir $U_{CD} = U_f = I_{12}(R_1 + R_2) = I_{34}(R_3 + R_4)$ para cada rama. Con esta expresión pueden obtenerse: $I_{12} = \dfrac{U_f}{R_1 + R_2}$ e $I_{34} = \dfrac{U_f}{R_3 + R_4}$ y con éstas, también por ley de Ohm, se obtienen las tensiones buscadas que muestran las Ec. 2-19 y 2-20.

$$U_{AD} = I_{12} R_2 = \frac{U_f}{R_1 + R_2} R_2 \qquad \text{Ec. 2-19}$$

$$U_{BD} = I_{34} R_4 = \frac{U_f}{R_3 + R_4} R_4 \qquad \text{Ec. 2-20}$$

Finalmente, con estos resultados en la Ec 2-18 se obtiene la expresión de la Ec. 2-21.

$$U_{AB} = U_A - U_B = \frac{U_f}{R_1 + R_2} R_2 - \frac{U_f}{R_3 + R_4} R_4 = U_f \left( \frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_4}{R_3 + R_4} \right) \qquad \text{Ec. 2-21}$$

Por ahora, el análisis de este circuito se da por finalizado en este punto. Al momento de aplicar estos resultados en temas posteriores, los mismos serán estudiados con el objeto de sacar algunas interesantes conclusiones.

## 2.5 Potencia y Energía

Es bien conocido que la potencia representa, para todo aspecto físico, como varía en el tiempo el trabajo o la energía y resulta siempre el producto de dos parámetros, uno representado por una variable de salto y el otro por una variable de salto.

En el Capítulo 1 luego de analizar las Ec. 1-16 y 1-19 se presentó la posibilidad de caracterizar la tensión y la corriente como *variable de salto* y *variable de paso* respectivamente. El concepto de esta forma de clasificación de variables es bastante intuitivo y en la referencia bibliográfica 2) puede ampliarse este enfoque.

Una *variable de salto* es toda magnitud física en la que es necesario puntos de referencia para su indicación. Un ejemplo es la velocidad. En el caso eléctrico la tensión requiere de la referencia de dos potenciales entre los cuales es explicito un “salto” de valor de los mismos.

En cambio una *variable de paso* identifica magnitudes físicas en las que importa el sentido. Por ejemplo la fuerza, y eléctricamente hablando la corriente.

En el caso particular eléctrico la potencia resulta $p(t) = u(t) \cdot i(t)$, si la tensión y/o la corriente varían en el tiempo, o $P = U \cdot I$, en caso contrario. En cualquiera de los casos, como se indica en el Apéndice A, la unidad de medida de este parámetro es W (watt).

La primera de las expresiones anteriores (recordando que está escrita en minúscula por ser variable en el tiempo) es más general, siendo la segunda el caso particular de no ser variable en el tiempo (ahora escrita con mayúscula).

Dado que tanto trabajo como energía son conceptos equivalentes y para la nomenclatura eléctrica se identifican con $w$, la formulación de la definición de la potencia es $p(t)=\frac{d}{dt}w(t)$ y por lo tanto, en la otra relación causa/efecto, $w(t)=\int_0^t p(t)dt$.

El inicio del cómputo de la integral se considera cuando existen simultáneamente $u(t)$ e $i(t)$, y como ya se sabe, previamente puede haber campo eléctrico o campo magnético en los correspondientes elementos reactivos y por lo tanto energía no nula en dicho inicio. Esta energía inicial es imposible en el caso del resistor.

Por otro lado, a partir de la realización de trabajo[5] es posible disponer de la electricidad. Esta es la que se modela por los elementos activos o sea las fuentes de tensión o de corriente independientes. En consecuencia y obviamente, para estos elementos también es preciso considerar energía inicial.

Otro detalle más, también presente en el Apéndice A, la unidad de medida de la energía y del trabajo es J (joule).

Con lo dicho, en cualquier componente de circuito activado o sea en el cual haya corriente y tensión (o tensión y corriente) habrá potencia, e integrando la misma, a partir de posibles valores iniciales cuando corresponda, se sabrá cómo es la variación temporal de la energía.

### 2.5.1 Potencia y energía en elementos pasivos no reactivos (resistor).

La Tabla 2-1 muestra las formulas consecuencia de lo dicho en el párrafo anterior para las dos versiones del resistor según se considere su característica resistiva $(R)$, cuando se lo activa en serie, o su característica conductiva $(G)$, cuando se lo activa en paralelo.

Para los análisis que siguen es bueno recordar que en el resistor siempre el sentido de la corriente es del positivo al negativo de la polaridad de la tensión independientemente de que la causa sea la corriente o la tensión. Esto fija que ese sentido y esa polaridad así relacionadas se consideren positivas.

**Tabla 2-1:**

| | | |
|---|---|---|
| $R$ | $p_R(t)=i(t)\cdot u(t)=i(t)\cdot i(t)R=i(t)^2\cdot R$ | $w_R(t)=\int_0^t p_R(t)\cdot dt=R\int_0^t i(t)^2\,d(t)$ |
| $G$ | $p_G(t)=u(t)\cdot i(t)=u(t)\cdot u(t)\cdot G=u(t)^2\cdot G$ | $w_G(t)=\int_0^t p_G(t)\cdot dt=G\int_0^t u(t)^2\,d(t)$ |

La simple observación de las formulas resultantes muestra que, sea o no cambiante en el tiempo la tensión o la corriente y sin importar como sea esa variación, la potencia siempre es positiva. Como consecuencia del anterior detalle, la variación temporal de la energía en el elemento no reactivo dadas por las integrales de $w_R(t)$ o $w_G(t)$ es siempre creciente y obvia-

[5]. Las compañías de electricidad suelen hacer campañas publicitarias sobre este aspecto solicitando el buen uso de la electricidad ya que la misma no es un bien renovable.

mente a partir de cero. Y otra referencia más sobre ambas integrales: volverán a aparecer con otra connotación en el Capítulo 4.

Para ejemplificar en forma simple, puede considerarse el caso de excitación continua (constante en el tiempo) que determina las características $U/I$ o $I/U$ de las Figuras 2-4 y 2-5 según sea $R$ o $G$. Aplicando las operaciones de la Tabla 2-1 a esta propuesta resultan las gráficas siguientes.

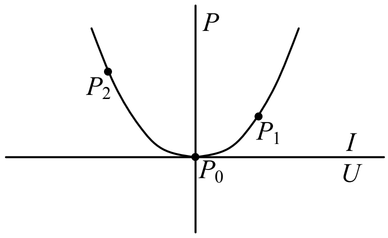



**Figura 2-24:**

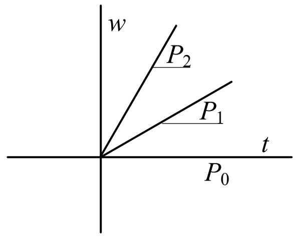



**Figura 2-25:**

En la Figura 2-24 se aprecia la parábola representativa de la de potencia en función de la excitación que activa el resistor. La abscisa es $I$ para el caso de $R$ y $U$ para el caso de $G$. En la curva se marcan tres valores: $P_0 = 0$, para excitación nula; $P_1$, para excitación en que el sentido de la corriente o la polaridad de la tensión son positivos y $P_2$, para excitación en que el sentido de la corriente o la polaridad de la tensión son negativos. En cualquiera de los dos casos de excitación no nula el resultado es positivo y constante en el tiempo.

La integración de las anteriores potencias se muestra en la Figura 2-25, representadas por las tres semirrectas cuyas pendientes son justamente cada una de las potencias. En el caso de $P_0$ la semirrecta coincide con el semieje de abscisa positivo, es decir energía siempre nula.

Una conclusión importante de esta sección referida al resistor, es el aumento del valor siempre positivo de la energía en el mismo, a medida que aumenta el tiempo.

### 2.5.2 Potencia y energía en elementos pasivos reactivos (inductor y capacitor)

El mismo procedimiento realizado en la sección anterior ahora activando en serie un inductor de inductancia $L$ o activando en paralelo capacitor de capacitancia $C$ da los resultados de la Tabla 2-2, teniendo en cuenta que en estos dos casos existe la posibilidad de energía no nula al inicio de integración la que se denomina $W_{ini}$.

**Tabla 2-2:**

| | | |
|---|---|---|
| $L$ | $p_L(t)=i(t)L\dfrac{di(t)}{dt}$ | $w_L(t)=W_{ini}+\int_0^t p_L(t)\cdot dt=W_{ini}+L\int_0^t i(t)di(t)=W_{ini}+\frac{1}{2}Li(t)^2$ |
| $C$ | $p_C(t)=u(t)C\dfrac{du(t)}{dt}$ | $w_C(t)=W_{ini}+\int_0^t p_C(t)\cdot dt=W_{ini}+C\int_0^t u(t)du(t)=W_{ini}+\frac{1}{2}Cu(t)^2$ |

El análisis de las fórmulas para la potencia muestra en ambas el producto de la corriente por su derivada temporal o la tensión también por su derivada temporal. Suponiendo, por

ejemplo, que la corriente o la tensión fuera siempre positivas podrían darse tres variaciones temporales: creciente, decreciente o constante. Esta suposición significa derivada positiva, negativa y nula respectivamente. Y finalmente el producto que se estuviera considerando resultaría, también respectivamente, positivo, *negativo* y *nulo*. Conclusión: para los componentes reactivos no puede asegurarse que la potencia es siempre positiva; es más, siendo la corriente o la tensión diferente de cero, puede resultar nula.

Los tres resultados posibles anteriores a su vez determinan que, a partir del posible valor inicial, la energía crezca, decrezca o se mantenga constante en el tiempo. Sin embargo, cualquier sea el caso, el resultado de la energía sigue siendo positivo (basta observar la expresión final de cada formula en la Tabla 2-2 donde tanto corriente como tensión están al cuadrado).

Un detalle más cuando la potencia es nula. La corriente o la tensión en el caso que corresponda deben ser constantes en el tiempo y las formulas finales recién comentadas muestran que la energía también será constante en el tiempo. Así un capacitor en circuito abierto con carga eléctrica significa: tensión y en consecuencia energía en el campo eléctrico y un inductor en corto circuito con flujo magnético significa: corriente y por lo tanto energía en el campo magnético.

Un ejemplo de lo visto en esta sección podría ser el caso del circuito de la Figura 2-26 en el cual la tensión, aplicada en paralelo, se desarrolla en el tiempo como muestra la Figura 2-27.

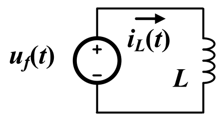



**Figura 2-26:**

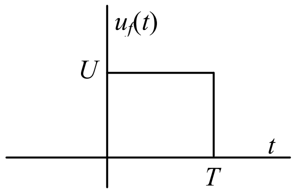



**Figura 2-27:**

Teniendo en cuenta la ecuación constitutiva para calcular la corriente en el inductor, $i_L(t) = \frac{1}{L}\int_0^t uf(t)\,dt$ y considerando $i(0) = 0$, para la tensión de la Figura 2-27 resulta dicha corriente como se ve en la Figura 2-28 (más adelante se comentará la parte punteada que se agrega). En esta gráfica se aprecia que la corriente mantiene, a partir de $t = T$ en el cual resulta $u_L = 0$ (equivalente a un cortocircuito), el valor constante $I = \frac{U}{L}T$ (circulación de cargas posible en el corto circuito mencionado).

Si ahora se multiplica la corriente por la tensión se obtiene la potencia en el inductor que muestra la Figura 2-29 y la integración de la misma determina la energía, graficada en la Figura 2-30 con valor cero en el inicio (se aclaró que la corriente inicial es nula).

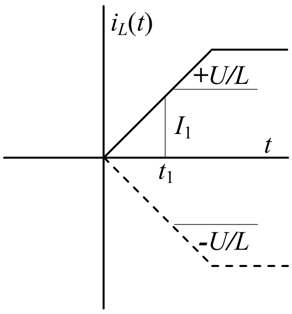



**Figura 2-28:**

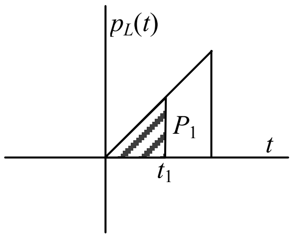



**Figura 2-29:**

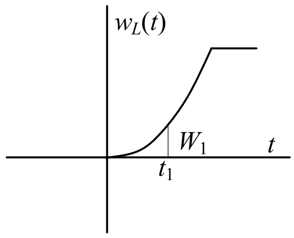



**Figura 2-30:**

En las tres Figuras precedentes se indica el valor del tiempo $0 < t_1 < T$ , en el cual se puede verificar (acción que se alienta a realizar) los siguientes resultados:

$$I_1 = \frac{U}{L} \cdot t_1 \qquad P_1 = \frac{U^2}{L} \cdot t_1 \qquad W_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{U^2}{L} \cdot t_1^2 \qquad \text{Ec. 2-22}$$

En particular la ordenada $W_1$ es el valor del área del triángulo sombreado en la Figura 2-29. Además, prestando atención, se ve cómo van a apareciendo sucesivamente parámetros al cuadrado en las Ec. 2-22.Y por último se verifica que la energía es crecientemente positiva hasta mantenerse constante, a partir de $t = T$ , como consecuencia de igual constancia de la corriente. Esta última situación energética es justamente un posterior caso de energía inicial que podría decrecer si se hace disminuir la corriente en el inductor.

La parte punteada en la Figura 2-28 es el caso de ser la tensión negativa y se alienta al lector a comprobar cómo sería el resultado con esta polaridad sin sorprenderse que la energía resulte nuevamente positiva.

Otras situaciones para verificar estos análisis energéticos que involucran componentes reactivos, se verán cuando se estudie el tema del Capítulo 6.

### 2.5.3 Potencia y energía en los elementos activos (fuentes de tensión o de corriente independientes)

Los elementos activos (fuentes de tensión o de corriente independientes ya referidos como los modelos de la disponibilidad de la electricidad y en los que debe considerarse también disponibilidad de energía inicial) no solamente activan a los elementos pasivos a los cuales se conectan sino que lo hacen sobre sí mismos.

Podemos clarificar esta aparente paradoja con el ya mencionado Diccionario de la Lengua Española (DEL) transcribiendo los siguientes significados.

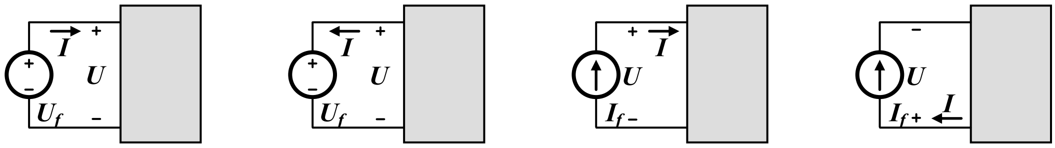
- Activo: Que obra o tiene capacidad de obrar (adjetivo).
- Activar: Hacer que se ponga en funcionamiento un mecanismo (acción).

El primer significado refiere a lo que pueden hacer los elementos identificados por ese adjetivo y que no pueden hacer los pasivos. Ahora que se activen, como acción, significa que tanto en los pasivos como en los activos exista simultáneamente tensión y corriente o corriente y tensión y por lo tanto potencia. Es bueno recordar que en una fuente de tensión sin conectar, o sea en circuito abierto, la corriente es cero y que en una fuente de corriente sin conectar, o sea en corto circuito, la tensión es cero.

En definitiva, la conexión de algún elemento activo a elementos pasivos o a otros activos, determina que en los mismos se establezca corriente, en las fuentes de tensión, y tensión, en las fuentes de corriente.

Esta conexión es determinante no solo del valor de cualquiera de estas consecuencias. También, y con una implicancia especial, lo es del sentido de la corriente por la fuente de tensión o la polaridad de la tensión en le fuente de corriente.

En otras palabras podrían darse las cuatro posibilidades mostradas esquemáticamente en la Figura 2-31, considerando para mayor sencillez y consecuente comprensión, la situación particular que las fuentes en cuestión son invariables en el tiempo.




caso a) caso b) caso c) caso d)

**Figura 2-31:**

En los casos a) y b) $U_f$ fija el valor y la polaridad de $U$ en el circuito, siendo el circuito el que determina los dos posibles sentidos de $I$. En el caso a) el sentido de la corriente es del $-$ al $+$ en la fuente de tensión y del $+$ al $-$ en la tensión en el circuito. En el caso b) el sentido de la corriente es del $+$ al $-$ en la fuente de tensión y $-$ al $+$ en la tensión en el circuito.

En los casos c) y d) $I_f$ es el que fija el valor y el sentido de $I$ en el circuito y ahora, el circuito es el que determina las dos posibles polaridades de $U$. Se comprueba que en el caso c) el sentido de la corriente es del $-$ al $+$ de la tensión en la fuente de corriente y del $+$ al $-$ de la misma tensión pero en el circuito. En el caso d) el sentido de la corriente es del $+$ al $-$ de la tensión en la fuente de corriente y del $-$ al $+$ de la misma tensión pero en el circuito.

Asignando como en el caso del resistor, positivo el sentido de la corriente del $+$ al $-$ de la tensión y positiva dicha polaridad. Si se mantiene positiva la polaridad de la tensión debe cambiarse a negativo el sentido de la corriente cuando es del $-$ al $+$ de la de tensión.

En definitiva cuando se determine la potencia podrá resultar positiva o negativa según los casos y la parte del circuito que se considere.

En los casos a) y c), en que cada una de las fuentes que activan al circuito y a sí mismas, la potencia es negativa. O sea la variación en el tiempo de la energía en cualquiera de las fuentes será decreciente a partir de la energía inicial.

En cambio y en los mismos casos, la potencia en la entrada del circuito es positiva. Es decir que la variación en el tiempo de la energía en dicha entrada será creciente. A su vez y en cada instante, esa energía debe ser la suma de las energías en los distintos elementos pasivos y activos que conforman el circuito activado. En los elementos pasivos no reactivos la variación temporal de la energía es como ya se estudió en la sección 2-7-1, en los reactivos debe cumplirse lo visto en la sección 2-7-2. En el caso de los elementos activos dentro del circuito, las fuentes podrán estar funcionando con sentido de corriente y polaridad de tensión como en alguno de los casos en estudio de los cuales dos se han completado.

La Figura 2-32 muestra la variación de la energía en dos fuentes (sin importar si son de corriente o de tensión) con diferentes valores de la energía inicial y de la potencia, siendo $P_2 > P_1$ y por lo tanto decreciendo más rápido la energía en el caso 2. Por el otro lado, en la figura 2-33 se grafica la variación creciente de la energía en el caso de un circuito sin elementos reactivo ni activos y por lo tanto con obvia energía nula para $t = 0$.

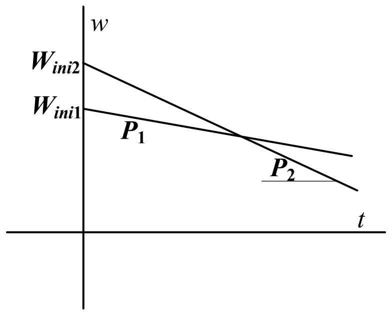



**Figura 2-32:**

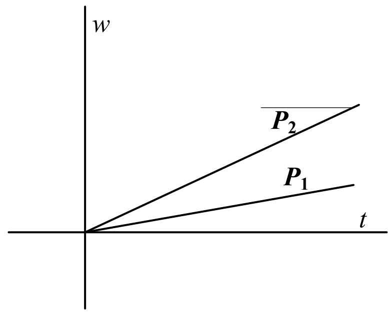



**Figura 2-33:**

En los dos casos restantes, b) y d), las fuentes explicitas no son activadas por si mismas sino por el circuito. En esta circunstancia la potencia en las mismas es positiva y por lo tanto la energía deberá ser creciente en el tiempo a partir de su valor inicial. En la Figura 2-34 se puede ver el ejemplo de carga de una batería de celular para que en $t = T$ su energía pase de $W_{ini}$ a $W_{fin} > W_{ini}$ con una tasa de variación temporal dada por $P_3$.

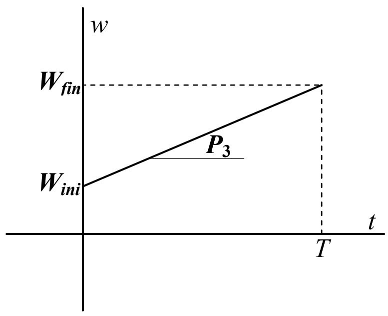



**Figura 2-34:**

## 2.5.4 Principio de conservación de la energía

Otro concepto que es también bien conocido es que en un sistema cerrado la energía total siempre se mantiene constante.

En otras palabras, para un circuito eléctrico la suma de las energías disponibles en los elementos activos y en los reactivos en el momento en que estos activan los elementos pasivos deberá ser igual a la suma de las energías en dichos elementos pasivos en todo instante.

En esta suma en los elementos pasivos, la energía será siempre creciente en los resistores, creciente o decreciente (según como resulte la variación temporal de la tensión en los capacitores o la corriente en los inductores) y posiblemente creciente en algún componente activo (fuente en las que el sentido de corriente es de + al − de la polaridad de la tensión). Sin duda, habiendo términos crecientes, tendrá que haber decrecimiento en alguno de los componentes del circuito incluidos activos.

Considerando el ejemplo ilustrado en las Figuras 2-32 y 2-33 para el caso de subíndice $2$, el resultado de la conservación de la energía se muestra en la Figura 2-35.

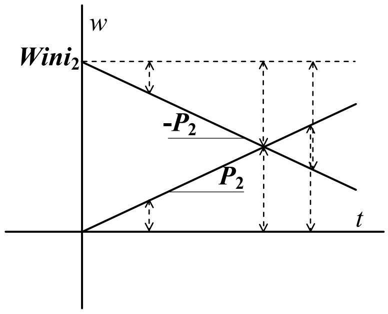



**Figura 2-35:**

La recta de pendiente positiva $P_2$ corresponde al aumento de la energía, por ejemplo, en una maquina eléctrica modelada por un resistor y en el que dicha energía significa el trabajo que realiza la máquina. En cambio la recta con pendiente $-P_2$, muestra como decrece la energía en la fuente de tensión que alimenta la maquina eléctrica. O sea: la continua disminución de energía en la fuente de tensión corresponde al continuo aumento de trabajo mecánico que realiza la maquina eléctrica.

En forma general lo primeramente dicho, aplicable al ejemplo mostrado, puede expresarse $\sum W_{ini} = \sum_n w_n = cte$ y si se deriva esta expresión respecto del tiempo resulta $\sum_n p_n = 0$.

Esta sumatoria de las potencias en cada uno de los elementos del circuito (tanto activos como pasivos) es nula dado que se iguala a la derivada de una constante y reafirma que en por lo menos en alguna fuente de tensión o corriente la potencia debe ser negativa y sirve para verificar más sencillamente el principio de conservación de la energía en un circuito obviamente bien analizado y resuelto.

Algunos comentarios finales de esta sección:

Es importante dejar en claro que la potencia no debe considerarse como un ente físico que se "*transfiere*" entre los componentes activos y pasivos del circuito. Esta aclaración es equivalente a la que debe hacerse para evitar el error que se comete en llamar *"circulación"* de la corriente, que en realidad es la circulación de las cargas eléctricas.

Sin embargo, realizar la analogía entre $i(t)=\frac{d}{dt}q(t)$ y $p(t)=\frac{d}{dt}w(t)$ no implica considerar analogía alguna de la energía con el modelo conceptual de las cargas eléctricas. En realidad la equivalencia es matemática y solo se presenta para fundamentar mejor la aclaración hecha en el párrafo anterior.

Por último tampoco debería pensarse que las pilas de la linterna mostrada en las Fotos B-1 y B-2 del Apéndice B *"transfieren"* energía a la lámpara.

El correcto proceso es el que surge luego que se modela la linterna y se convierte en circuito eléctrico como se aprecia en la Figura B-3 del mismo Apéndice B. En definitiva la fuente de tensión (las pilas) determina que haya corriente, o lo mismo que circulen cargas eléctri-

cas, por un resistor (el filamento de la lámpara). La consecuencia final es el aumento de temperatura en el filamento y su consecuente radiación luminosa.

Desde el punto de vista del análisis del circuito eléctrico surgen también la potencia y la energía en cada elemento. Y esta última debe conservarse: disminuye electroquímicamente en la pila para aumentar lumínicamente en la lámpara (el lector podrá ser más detallado en esta conservación energética pero la idea simplificada es suficiente).

Quizás sea más representativo indicar este concepto como *"transformación"*. Así en los elementos reactivos operaria una *"transformación"* energética *reversible* por disponer energía luego de un tiempo de activación. En cambio modelar la realidad con un resistor es consecuencia que la energía se *"transforma"* en trabajo o sea es *irreversible*.

## 2.6 Instrumentos y mediciones

Resulta interesante y conveniente a esta altura introducir los instrumentos de medición básicos utilizados en la electrotecnia: el voltímetro y el amperímetro

Para hacer posibles las mediciones es necesario intercalar los instrumentos en el circuito. Si lo que se desea medir es una corriente, debe intercalarse en serie un amperímetro en la rama en la cual está presente la misma. De forma similar, para medir una tensión en un elemento, debe conectarse un voltímetro en paralelo con el mismo. En el caso del amperímetro es necesario abrir previamente la parte del circuito donde se va a colocar, no siendo el caso del voltímetro. De cualquier forma cada uno de los dos instrumentos debe formar parte del circuito para el análisis del mismo.

Para evitar la influencia de estos instrumentos en las condiciones de funcionamiento del sistema, el amperímetro debe comportarse como un corto circuito y el voltímetro como un circuito abierto. Es decir las características ideales (o teóricas) de los mismos se refieren a la existencia de una *resistencia interna*, las cuales deben tener los siguientes valores:

| **Amperímetro** | **Voltímetro** |
|---|---|
| $R_A = 0\ \Omega$ | $R_V = \infty\ \Omega$ |

Otra característica de cualquiera de los dos medidores es el *valor máximo admisible*, es decir la tensión y/o la corriente máxima soportada por el instrumento real en cada condición de funcionamiento. Estos valores máximos admisibles, a su vez, definen el *rango* o *alcance de medición*, que se verá que puede ser ampliado.

### 2.6.1 Amperímetro

Como ya se mencionara, el amperímetro básico ideal (galvanómetro) tiene resistencia interna ($R_A$) igual a cero. No debe olvidarse que, en la práctica, el instrumento real tiene resistencia interna muy baja, pero distinta de cero. Las Figuras 2-36 y 2-37 muestran ambos casos.

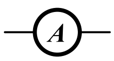



**Figura 2-36:**Amperímetro ideal, $R_A = 0$

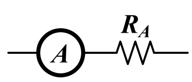



**Figura 2-37:**Amperímetro real $R_A \neq 0$

Se debe advertir que el símbolo de un amperímetro real es la combinación de un amperímetro ideal (cortocircuito) en serie con una resistencia $R_A \neq 0\ \Omega$

Debe tenerse en cuenta en los análisis que siguen, que $I_{Amáx}$ es la corriente máxima admisible por el instrumento y es otro de los parámetros que caracterizan al mismo. En la Figura 2-38 se repite el símbolo de un amperímetro real, e $I_m$ representa la corriente a medir.

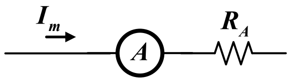



**Figura 2-38:** Amperímetro real con corriente admisible $I_{Amáx}$

Si $I_m$ resultara mayor que $I_{Amáx}$, puede conectarse una resistencia *derivadora* $R_D$ en paralelo con el instrumento elemental, formando lo que se conoce como *divisor de corriente*, por la cual se derivará la diferencia de corriente entre $I_m$ e $I_{Amáx}$, tal como se muestra en la Figura 2-39. Es importante prestar atención a que, para el análisis del divisor de corriente, es preciso tener en cuenta la *LKC*.

Puede observarse que con esta disposición es posible aumentar el alcance del amperímetro elemental.

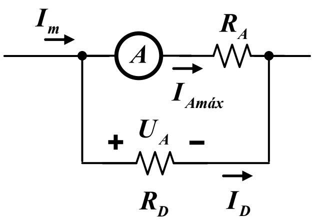



**Figura 2-39:** Amperímetro real con alcance aumentado y con $I_{Amáx}$ por el amperímetro ideal

Para el cálculo de dicha resistencia derivadora debe observarse que la tensión sobre el paralelo vale $U_A = I_D R_D = I_{Amáx} R_A$ de la cual surge, teniendo en cuenta que $I_m = I_D + I_{Amáx}$ la siguiente expresión de $R_D$

$$R_D = \frac{I_{Amáx} \cdot R_A}{I_m - I_{Amáx}}$$

Luego, si el instrumento ya estuviese diseñado, la corriente genérica a medir $I_{xm}$ se determina, a partir de los valores de $I_{Amáx}$, $R_A$ y $R_D$, como

$$I_{xm} = I_{Amáx} \cdot \left(1 + \frac{R_A}{R_D}\right)$$

Se puede generalizar lo anterior para construir un amperímetro *multirrango*; es decir, un amperímetro capaz de medir corrientes de valores tan grandes como se desee, como se muestra en la Figura 2-40, donde $R_{D3} < R_{D2} < R_{D1}$ para que se cumpla $I_{D3} > I_{D2} > I_{D1}$.

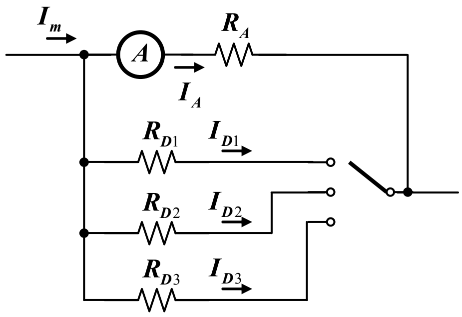



**Figura 2-40:** Amperímetro multirrango. El alcance aumenta bajando la llave

Se deja como ejercicio para el lector el cálculo de las resistencias derivadoras para este caso.

### 2.6.2 Voltímetro

También ya se dijo que el voltímetro elemental ideal (o teórico) tiene resistencia interna ($R_V$) igual a infinito. En la práctica, el instrumento real tiene resistencia interna muy alta, pero distinta de infinito. Las Figuras 2-41 y 2-42 muestran ambos casos.

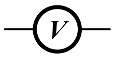



**Figura 2-41:** Voltímetro ideal, $R_V = \infty$

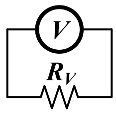



**Figura 2-42:** Voltímetro real $R_V \neq \infty$

Se debe advertir que el símbolo de un voltímetro real es la combinación de un voltímetro ideal (circuito abierto) en paralelo con una resistencia $R_V \neq \infty\ \Omega$. Debe tenerse en cuenta en los análisis que siguen, que $U_{Vmáx}$ es la tensión máxima admisible por el instrumento y es otro de los parámetros que caracterizan al mismo.

En la Figura 2-43 se repite el símbolo de un voltímetro real, y $U_m$ representa la tensión a medir.

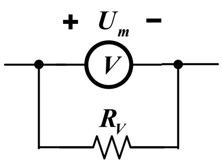



**Figura 2-43:** Voltímetro real con tensión admisible $U_{Vmáx}$

Si $U_m > U_{Vmáx}$, puede conectarse una resistencia *multiplicadora* $R_M$ en serie con el instrumento elemental, formando un *divisor de tensión*, en la cual se establecerá el excedente de tensión entre $U_m$ y $U_{Vmáx}$. Para el caso a analizar se puede observar la Figura 2-44. En este caso para el análisis del divisor de tensión se debe tener en cuenta la *LKT*.

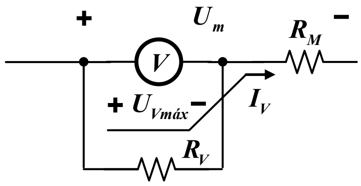



**Figura 2-44:** Voltímetro real con alcance aumentado y con $U_{Vmáx}$ por el voltímetro ideal

Para el cálculo de dicha resistencia multiplicadora debe tenerse en cuenta que la tensión sobre el circuito serie vale

$$U_m = I_V \cdot (R_V + R_M) = U_{Vmáx} + U_{Vmáx} \cdot \frac{R_M}{R_V} = U_{Vmáx} \cdot \left(1 + \frac{R_M}{R_V}\right)$$

de la cual surge la siguiente expresión de $R_M$

$$R_M = \left(\frac{U_m}{U_{Vmáx}} - 1\right) \cdot R_V$$

Luego, si el instrumento ya estuviese diseñado, una tensión genérica a medir $U_{xm}$ se determina, a partir de los valores de $U_{Vmáx}$, $R_V$ y $R_M$, como

$$U_{mx} = U_{Vmáx} \cdot \left(1 + \frac{R_M}{R_V}\right)$$

Se puede generalizar lo anterior para construir un voltímetro *multirrango*; es decir, un voltímetro capaz de medir tensiones de valores tan grandes como se desee, como muestra la Figura 2-45.

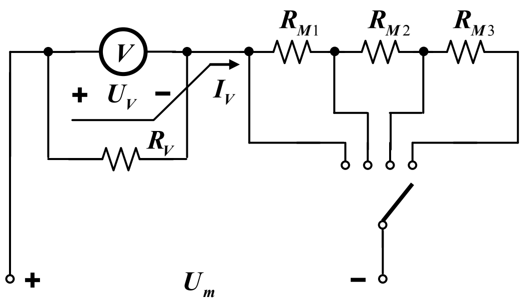



**Figura 2-45:** Voltímetro multirrango. El alcance aumenta con la llave hacia la derecha

En este caso al conectar la llave en sucesivos puntos a la derecha las $R_{Mi}$ se suman haciendo un equivalente cada vez mayor.

Se deja como ejercicio para el lector el cálculo de las resistencias multiplicadoras para este caso.

### 2.6.3 Mediciones y errores

Medir significa comparar una magnitud de valor desconocido con una magnitud de referencia de igual especie, previamente elegida, que se denomina *unidad de medida*.

En general los resultados de las mediciones no son exactos. Por más cuidado que se tenga en todo el proceso de la medición, es imposible expresar el resultado de la misma como *exacto*. Aún los patrones tienen error.

En general, se acepta que las fuentes de error en las mediciones son debidas a:

a) **El instrumental**. Los instrumentos poseen errores inherentes a ellos: diferencias de calidad, condiciones de funcionamiento, etc.
b) **El método de medida**. La inserción de los instrumentos en el circuito modifica las condiciones de funcionamiento debido a las resistencias internas, por lo cual es importante tener en cuenta la influencia de las características de los instrumentos reales utilizados.
c) **El operador**. Aun cuando el operador posea amplia experiencia en la utilización del instrumental, es esperable que se produzcan discrepancias en las lecturas efectuadas.

El estudio a fondo de la teoría de errores excede los alcances de este capítulo y por lo tanto no se efectuará.

#### 2.6.3.1 Definiciones

Se pueden adoptar algunas definiciones, las cuales no son de uso exclusivo de las mediciones de carácter eléctrico.

**a) Precisión y exactitud (*repetibilidad* e *incertidumbre*).** Las diferencias entre estas características no son tan sutiles como se supone. La *precisión* está vinculada con la *repetibilidad* de una medición, mientras que la *exactitud* se relaciona con la proximidad al valor *verdadero* de la misma. Es decir que una medición *precisa* es aquélla que, ante una misma excitación, presenta (o *repite*) siempre el mismo resultado. Por otra parte, una medición *exacta* se refiere a la proximidad a lo *verdadero* del resultado de dicha acción. Por lo tanto, de lo anterior se deduce que un instrumento *preciso* no siempre es y viceversa. Actualmente, los conceptos sobre estos temas están introduciendo denominaciones nuevas en reemplazo de las anteriores; es así como surgen *repetibilidad*, en lugar de precisión, e *incertidumbre*, en lugar de exactitud.

**b) Medida directa e indirecta.** Las mediciones *directas* son aquéllas que se realizan sin necesidad de una medición intermedia adicional. Por ejemplo, una longitud se puede determinar a partir de la medición con un instrumento específico (una regla o una cinta métrica), constituyendo una *medición directa*; mientras que una superficie o un volumen surgen a partir de dos o tres mediciones de longitud (para el caso de un rectángulo o un paralelepípedo) más un cálculo adicional (producto de las mediciones), obteniéndose una *medición indirecta*.

**c) Valor verdadero ($Vv$).** El valor verdadero es casi imposible de conocer. En la práctica puede tomarse como tal al promedio hallado a través de un muestreo estadístico de un gran número de mediciones, que se adopta como *valor verdadero convencional*. Dicho valor medio se aproximará tanto más al valor verdadero de la magnitud cuanto mayor sea el número de medidas, ya que los errores aleatorios de cada medida se va compensando unos con otros.

d) **Error absoluto**. Se define como la diferencia entre el valor medido respecto de aquél que se ha tomado como verdadero: $E=V_m - V_v$

e) **Error relativo**. Resulta del cociente entre el error absoluto y el valor verdadero (convencional), el cual se toma como referencia: $e=\frac{E}{V_v}$

f) **Error sistemático.** Se llaman así porque se repiten sistemáticamente en el mismo valor y sentido en todas las mediciones que se efectúan en iguales condiciones. Pueden deberse a fallas de los instrumentos o del operador, son posibles de cuantificar y por lo tanto desafectar de las mediciones.

#### 2.6.3.2 Medición de resistencias con voltímetro y amperímetro

Consiste en efectuar la medición de la corriente y de la tensión a través de una resistencia incógnita mediante el uso de un amperímetro y de un voltímetro, respectivamente; resultando el valor de dicha resistencia incógnita una medición indirecta, cuyo resultado se basa en la ley de Ohm.

Puesto que los instrumentos son reales, lo que implica que poseen resistencia interna finita ($R_A$ y $R_V$), la medición arrojará errores, los cuales pueden ser desafectados siempre y cuando dichas resistencias sean conocidas. Obsérvese la Figura 2-45.

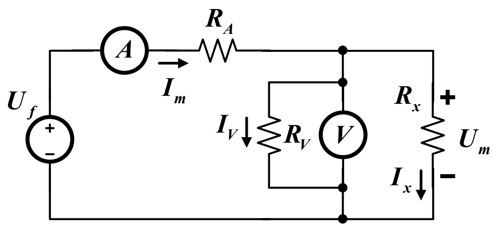



**Figura 2-45:** Medición de una resistencia incógnita mediante voltímetro y amperímetro

Analizando el circuito de la Figura 2-45, el valor de la resistencia incógnita $R_x$ puede expresarse como:

$$R_x = \frac{U_m}{I_x} = \frac{U_m}{I_m - I_V} \qquad \text{Ec. 2-28}$$

Pero, dado que durante una medición los valores con que se cuenta son aquéllos surgidos de las indicaciones de los instrumentos, se puede escribir:

$$R_m = \frac{U_m}{I_m} \qquad \text{Ec. 2-29}$$

Y como la corriente que mide el amperímetro es la suma de las corrientes por la incógnita y por el voltímetro, mientras que la tensión medida por este último corresponde al paralelo entre $R_V$ y $R_X$, resulta

$$R_m = \frac{R_V \cdot R_x}{R_V + R_x} \qquad \text{Ec. 2-30}$$

que justamente es el paralelo de $R_V$ con $R_x$; lo que indica que el valor medido no es efectivamente el de $R_x$, sino el paralelo mencionado.

Despejando $R_x$ de la última expresión, resulta:

$$R_x = \frac{R_m \cdot R_V}{R_m - R_V}$$

Se observa que hay diferencias entre la resistencia medida $R_m$ y la "verdadera" $R_x$.

Luego, se pueden determinar los errores absolutos y relativos $\Delta R$ y $e_R$, respectivamente:

$$\Delta R = R_m - R_x = \frac{R_m{}^2}{R_V - R_m}$$

y

$$e_R = \frac{\Delta R}{R_x} = -\frac{R_m}{R_V}$$

Observándose con más detalle la Figura 2-45, puede advertirse que el voltímetro se encuentra a una distancia *más corta* de la resistencia incógnita que el amperímetro, por lo que este tipo de conexión se denomina *conexión corta*.

Se puede utilizar otra forma de conexión de los instrumentos, que como contrapartida de la anterior se denomina *conexión larga*. Sea la Figura 2-46.

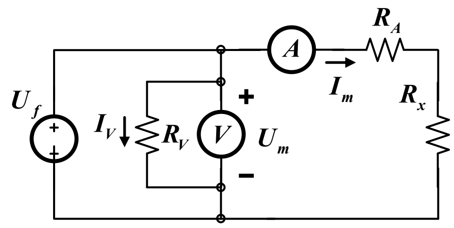



**Figura 2-46:** Conexión larga

Al igual que antes, se suponen conocidas las resistencias internas de los instrumentos, $R_A$ y $R_V$.

En este caso, y haciendo un análisis similar al anterior, la resistencia "verdadera" $R_x$ vale:

$$R_x = \frac{U_m - U_A}{I_m}$$

pues la tensión que mide el voltímetro es la suma de las tensiones en el amperímetro más la de la resistencia incógnita, de lo cual surge que para obtener la tensión sobre $R_X$ debe restarse la tensión sobre el amperímetro a la lectura del voltímetro.

Por otra parte, la resistencia medida $R_m$ vale:

$$R_m = \frac{U_m}{I_m} = R_A + R_x$$

de lo cual resulta

$$R_x = R_m - R_A$$

Como antes, hay diferencias entre la resistencia medida $R_m$ y la "verdadera" $R_x$, por lo tanto se pueden calcular $\Delta R$ y $e_R$.

$$\Delta R = R_m - R_x = R_A$$

y

$$e_R = \frac{\Delta R}{R_x} = \frac{R_A}{R_m - R_A} \cong \frac{R_A}{R_m} \qquad \text{pues } R_A << R_m$$

### 2.6.3.3 Conexión más conveniente

Si se grafican los errores relativos $e_R$ en función de la resistencia medida $R_m$ para cada uno de los dos casos estudiados, queda lo siguiente:

error relativo de la conexión corta $\qquad e_C = -\frac{R_m}{R_V}$

error relativo de la conexión larga $\qquad e_L = \frac{R_A}{R_m}$

Va a existir un valor de $R_m$ para el cual $|e_L| = |e_C|$; dicho valor se denomina $R_{crítica}$ y de la igualdad anterior se puede escribir lo siguiente

$$\frac{R_m}{R_V} = \frac{R_A}{R_m}$$

y de aquí surge el mencionado valor de $R_{crítica}$, luego de despejar $R_m$

$$R_{crítica} = \sqrt{R_V \cdot R_A}$$

La Figura 2-47 muestra las graficas del error para cada una de las conexiones de medida y el valor particular de la condición crítica.

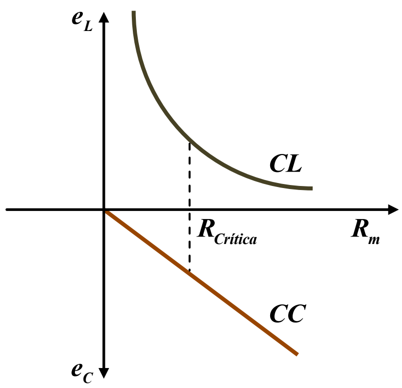



**Figura 2-47**

A partir de los resultados anteriores se puede concluir que, previamente a la medición de una resistencia con voltímetro y amperímetro, debe compararse el valor estimado de $R_x$ (o resistencia a medir $R_m$) con $R_V$ y con $R_A$ para obtener el menor error:

a) Si $R_m < R_{crítica}$ o, en otras palabras, $R_m$ es pequeña, debe utilizarse la *conexión corta* para efectuar la medición.

b) Si $R_m > R_{crítica}$ o, en otras palabras, $R_m$ es grande, debe utilizarse la *conexión larga.*

## 2.7 Comprobación de dualidad

En el Capítulo 1, luego de considerar las ecuaciones de Maxwell en el vacío (Ec. 1-5, 1-6, 1-7 y 1-8), se mostró una característica notable en el formato de dichas ecuaciones que determinó la presentación del concepto de dualidad. También se anticipó que este concepto sería de aplicación "a otros tipos de parámetros y magnitudes escalares, eléctricas y magnéticas".

A continuación se indican algunos ejemplos surgidos del desarrollo de este Capítulo 2 en los cuales se cumple "la misma vinculación matemática para variables con comportamiento dual". En cada referencia se muestran algunos de los detalles que permiten comprobar la dualidad, alentando al lector ampliar el panorama incluyendo otros posibles ejemplos.

Figuras 2-2 y 2-3: mismo gráfico si se cambia $L$ por $C$, $\Phi$ por $Q$ y $U$ por $I$.

Figuras 2-4 y 2-5: mismo gráfico si se cambia $R$ por $G$ y $U$ por $I$.

Figuras 2-6 y 2-7: mismo comportamiento si se cambia *fuente de tensión* por *fuente de corriente* y *circuito abierto* por *cortocircuito*.

Figuras 2-12 y 2-13: mismo comportamiento si se cambia *fuente de tensión* por *fuente de corriente* y *circuito serie* por *circuito paralelo*.

Ec. 2-5, 2-6, 2-7 y 2-8, 2.9, 2.10: igual formulación si se cambia *LKC* por *LKT* y *nodo* por *malla.*

Figuras 2-17 y 2-18: mismo gráfico con todos sus detalles si se cambia $R$ por $G$ y $U$ por $I$.

Tabla 2-1: igual formulación si se cambia $R$ por $G$ y $u$ por $i$.

Tabla 2-1: igual formulación si se cambia $L$ por $C$ y $u$ por $i$.

En el próximo Capítulo 3 se utilizará esta característica como método de análisis y resolución de circuitos.

## 2.8 Bibliografía

Página web: *http://www.goodfellow.com* (proveedor de metales).

# CAPÍTULO 3
# Técnicas para el análisis de circuitos

Si bien es posible analizar y resolver cualquier circuito eléctrico mediante la estricta aplicación de las leyes de Ohm y Kirchhoff, muchas veces resulta más práctico recurrir a ciertas técnicas de análisis las cuales requieren, para una mayor eficiencia de su aplicación, una inspección previa del circuito bajo análisis y de su topología; por lo cual algunas de estas formas de encarar la resolución requiere ciertas habilidades, lo que se logra mediante la ejercitación intensiva.

En algunas ocasiones resulta de utilidad simplificar circuitos, dado que a veces se requiere efectuar el estudio en una porción aislada de un circuito más complejo.

Es así que surgen el *análisis de nodos* y *de mallas*, el *principio de superposición* y los *circuitos equivalentes de Thevenin* y *de Norton*.

Al respecto, el análisis de nodos es un poderoso método general de análisis aplicable a cualquier red eléctrica, sin importar su complejidad.

El análisis de mallas tiene características similares al análisis de nodos, con la única restricción de ser sólo aplicable a redes planas.

El principio de superposición, aplicable a redes lineales, presenta su aplicación más importante en el análisis de redes trifásicas y en circuitos con tensiones y corrientes poliarmónicas, objetos de estudio en capítulos posteriores.

Los circuitos equivalentes de Thevenin y Norton permiten simplificar circuitos reemplazando gran parte de una red, generalmente muy compleja, por una red sumamente sencilla consistente en una fuente real; de tensión o de corriente, según el caso.

## 3.1 Análisis de nodos

### 3.1.1 Introducción

El análisis de nodos se basa en la determinación de las expresiones de lastensiones de todos los *nodos independientes* del circuito bajo estudio, las cuales se consideran como incógnitas del problema.

Debe recordarse, de la sección 2.4.3.2 del Capítulo 2, que la cantidad de nodos independientes de un circuito resulta igual a $N$-1, donde $N$ es la cantidad total de nodos. Por lo tanto, es posible obtener $N$-1 ecuaciones de LKC. Cuando estas ecuaciones se reescriben en función de las tensiones de dichos nodos referidas al nodo restante, que se toma como *referencia*, se obtiene como resultado un sistema de $N$-1 ecuaciones, en las cuales las incógnitas son las tensiones de los nodos en cuestión.

Con el objeto de ejemplificar la aplicación del análisis de nodos, se utilizará el circuito presentado en la Figura 2-19 del Capítulo 2, el cual se reproduce a continuación.

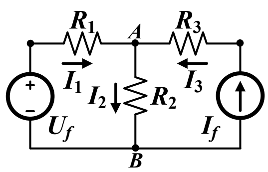



**Figura 3-1:** Circuito propuesto para ejemplificar el análisis de nodos

Como se mencionara, a los efectos de la aplicación del análisis de nodos es importante efectuar una inspección del circuito previa a cualquier otra acción a tomar sobre el mismo.

Luego de la inspección, la primera pregunta que debe surgir se refiere al número de nodos. Seguidamente, debe decidirse qué nodo conviene tomar como referencia. Finalmente, debe plantearse LKC en los nodos independientes.

Para el caso del circuito de la Figura 3-1, y tal como se determinó en la ya recordada sección 2.4.3.2, el mismo presenta dos nodos ($N$=2), por tanto hay sólo un nodo independiente ($N$-1=1).

El planteo de LKC en el nodo A es el siguiente

$$I_1 + I_3 = I_2 \qquad \text{Ec. 3-1}$$

Teniendo en cuenta los sentidos de las corrientes en sus respectivas ramas y las polaridades de las tensiones generadas por aquéllas, la Ec. 3-1 se puede reescribir de la siguiente manera

$$\frac{U_{R1}}{R_1} + I_f = \frac{U_{R2}}{R_2} \qquad \text{Ec. 3-2}$$

Debe observarse que $I_3$ coincide con $I_f$, que es la corriente impuesta por la fuente en dicha rama.

Es posible ahora escribir las tensiones en $R_1$ y $R_2$ en función de la tensión del nodo $A$ y la tensión de la fuente, como se muestra a continuación.

$$\frac{U_f - U_A}{R_1} + I_f = \frac{U_A}{R_2} \qquad \text{Ec. 3-3}$$

Reordenando esta expresión, resulta

$$U_A = \left(\frac{U_f}{R_1} + I_f\right) \Big/ \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \qquad \text{Ec. 3-4}$$

que también se puede escribir como

$$U_A = \frac{G_1 U_f + I_f}{G_1 + G_2} \qquad \text{Ec. 3-5}$$

donde $U_A$ es la única incógnita.

Se puede observar que el funcionamiento del circuito, al tener un único nodo independiente, puede describirse sólo por la ecuación del nodo A; ésto es así, dado que una vez calculado el valor dicha tensión resulta factible calcular, mediante la ley de Ohm, la tensión sobre $R_1$ y consiguientemente la corriente $I_1$. Asimismo, con $U_A$ se puede obtener la corriente $I_2$. Finalmente, al ser $I_f$ dato, se puede determinar las tensiones sobre $R_3$ y sobre la fuente de corriente.

### 3.1.2 Otro ejemplo

El circuito de la Figura 3-2 tiene tres nodos, por lo tanto dos de ellos (1 y 2) son independientes y el tercero (0) se puede tomar como referencia.

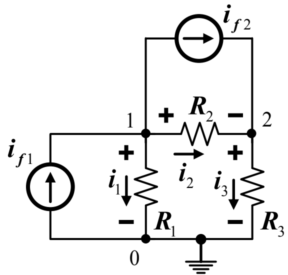



**Figura 3-2:** Circuito de ejemplo

Planteando en los nodos 1 y 2

$$i_{f1} = i_{f2} + i_1 + i_2 \qquad \text{Ec. 3-6}$$

$$i_{f2} + i_2 = i_3 \qquad \text{Ec. 3-7}$$

Reagrupando corrientes y tensiones

$$i_{f1} - i_{f2} = u_1\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) - u_2\frac{1}{R_2} \qquad \text{Ec. 3-8}$$

$$i_{f2} = -\frac{u_1}{R_2} + u_2\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) \qquad \text{Ec. 3-9}$$

Reemplazando las resistencias por las conductancias correspondientes

$$i_{f1} - i_{f2} = u_1(G_1 + G_2) - u_2 G_2 \qquad \text{Ec. 3-10}$$

$$i_{f2} = -u_1 G_2 + u_2(G_2 + G_3) \qquad \text{Ec. 3-11}$$

Estas dos ecuaciones representan el comportamiento del circuito. Si se consideran conocidos los valores de las resistencias o las conductancias y de las fuentes de corriente, resulta evidente que las únicas incógnitas son las tensiones de los nodos 1 y 2.

Finalmente, se puede escribir el sistema anterior en forma matricial, de la siguiente manera

$$\begin{bmatrix} i_{f1} - i_{f2} \\ i_{f2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 \\ -G_2 & G_2 + G_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \qquad \text{Ec. 3-12}$$

El sistema de ecuaciones Ec. 3-12 está preparado para ser resuelto mediante algún método numérico adecuado.

Obsérvese la simetría de la matriz de coeficientes de conductancia, en la cual los términos fuera de la diagonal principal son iguales entre sí y de signo negativo. Obsérvese además, que dicha conductancia corresponde al resistor que vincula ambos nodos independientes.

Respecto de los términos de la diagonal principal, es posible advertir que el término superior izquierdo de la misma está conformado por la suma de las conductancias que concurren al nodo 1, a la vez que el término inferior derecho corresponde a la suma de las conductancias que vinculadas al nodo 2.

Queda claro que con las tensiones de nodo halladas es posible obtener las tensiones sobre cada resistor y luego mediante la ley de Ohm, sus correspondientes corrientes.

### 3.1.3 Resumen

Como consecuencia del análisis presentado, es posible hacer un resumen de acciones a tomar para el análisis, consistente en los tres pasos siguientes:

1.-Se elige un nodo de referencia (con tensión igual a cero), asignando una variable (tensión) a cada uno de los restantes nodos $N_i$. La polaridad de estas tensiones se asigna respecto al nodo de referencia.

2.-Se aplica LKC a cada nodo $N_i$, aplicando la ley de Ohm para expresar las corrientes de rama en términos de las tensiones de nodo.

3.-Se resuelve el sistema de ecuaciones hallado para obtener las tensiones de nodo desconocidas.

### 3.1.4 Caso especial: *supernodo*

Considérese el circuito de la Figura 3-3.

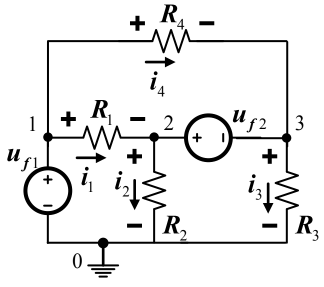



**Figura 3-3:** Caso especial. Supernodo

En principio, pareciera ser evidente que el circuito posee cuatro nodos (0; 1; 2 y 3), por lo tanto se puede tomar uno de ellos como referencia. Ésto se hizo con el nodo 0. Por lo mencionado, es esperable obtener tres ecuaciones de nodos.

Ahora bien, ¿resulta correcto afirmar que los tres nodos restantes son *independientes*?

Obsérvese que entre los nodos 2 y 3 hay una fuente de tensión. Ésto significa que conocida la tensión de uno de los nodos, inmediatamente se conoce la tensión del otro. Por lo tanto, una de las ecuaciones queda automáticamente eliminada del sistema en estudio.

Cabe preguntarse qué ocurre con la fuente de tensión conectada entre 0 y 1, la cual invita a pensar que su situación es la misma que la de la primera fuente. Debe tenerse cuidado antes de realizar esta afirmación: uno de los bornes de la misma se encuentra conectado al nodo de referencia, por lo cual resulta indispensable sostener al nodo 1 como independiente, de otro modo no podría obtenerse una expresión de las corrientes por $R_1$ y por $R_4$, como se verá. De esta manera se puede presentar la siguiente afirmación:

*Se obtiene un* ***supernodo*** *cuando una fuente de tensión se encuentra conectada entre dos nodos distintos del de referencia.*

Podría redibujarse el circuito de acuerdo a la Figura 3-4.

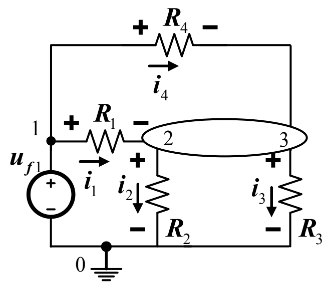



**Figura 3-4:** Circuito de la Figura 3-3 modificado para poner de manifiesto el supernodo

Se pueden plantear las ecuaciones en los nodos. Para el nodo 1

$$u_1 = u_{f1} \quad \text{Ec. 3-13}$$

La LKC aplicada al *supernodo* de la Figura 3-3 resulta

$$i_1 + i_4 = i_2 + i_3 \quad \text{Ec. 3-14}$$

Reescribiendo la anterior, resulta

$$\frac{u_{f1} - u_2}{R_1} + \frac{u_{f1} - u_3}{R_4} = \frac{u_2}{R_2} + \frac{u_3}{R_3} \quad \text{Ec. 3-15}$$

Teniendo en cuenta, además, que

$$u_2 - u_3 = u_{f2} \quad \text{Ec. 3-16}$$

Finalmente se puede escribir

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{G_1 + G_2}{G_1 + G_4}\right) & \left(\frac{G_3 + G_4}{G_1 + G_4}\right) \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{f1} \\ u_{f2} \end{bmatrix} \quad \text{Ec. 3-17}$$

Se aprecia que la Ec. 3-17 ya no presenta la simetría de la Ec. 3-12.

Nuevamente, con las tensiones halladas resulta posible calcular las tensiones en todos los resistores del circuito y luego sus correspondientes corrientes mediante aplicación de la ley de Ohm.

## 3.2 Análisis de mallas

### 3.2.1 Introducción

El análisis de mallas se basa en la determinación de las expresiones de las corrientes de todas las *mallas* del circuito bajo estudio, las cuales se consideran como incógnitas del problema. En consecuencia y antes de continuar es preciso recordar, del inicio de la sección 2.5 del Capítulo 2, la definición de *malla* en contraste con la de *lazo* o *bucle*.

Dado que se puede asociar una corriente de malla a una variable del problema, se pueden determinar tantas *ecuaciones de mallas* como corrientes de mallas se obtengan del análisis del circuito para encontrar la solución de un circuito.

La elección de las corrientes de malla en lugar de las corrientes en cada elemento resulta conveniente y reduce el número de ecuaciones.

Se puede utilizar el circuito de la Figura 3-5 para ejemplificar la aplicación del análisis de mallas.

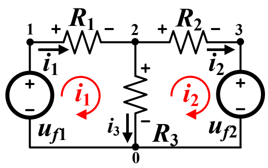



**Figura 3-5:** Análisis de mallas

Efectuando un análisis topológico como en casos anteriores, es posible identificar tres lazos en el circuito. En base a lo desarrollado en la mencionada referencia al inicio de la sección 2-5 del Capítulo 2, se puede afirmar que existen dos mallas, es decir dos bucles que no contienen otros lazos. Dichas mallas están identificadas por las corrientes de malla $i_1$ e $i_2$. Se observa que se ha elegido un sentido para las corrientes de malla que coincide con el de las agujas del reloj; aunque podría haber sido también anti horario. En cualquier caso siempre resulta conveniente que el mismo sea el mismo para todas las corrientes de malla, como se verá.

Aplicando la LKT se puede escribir

$$u_{f1} = R_1 i_1 + R_3 i_1 - R_3 i_2 \qquad \text{Ec. 3-18}$$

$$R_3 i_1 - R_3 i_2 = R_2 i_2 + u_{f2} \qquad \text{Ec. 3-19}$$

Reordenando y reagrupando resulta

$$u_{f1} = (R_1 + R_3) i_1 - R_3 i_2 \qquad \text{Ec. 3-20}$$

$$-u_{f2} = -R_3 i_1 + (R_2 + R_3) i_2 \qquad \text{Ec. 3-21}$$

Si las Ec. 3-20 y 3-21 se escriben en forma matricial, se tiene

$$\begin{bmatrix} u_{f1} \\ -u_{f2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \qquad \text{Ec. 3-22}$$

Obsérvese la simetría obtenida; al compararla con la Ec. 3-12, se puede decir que la resistencia $R_3$ es común a las dos mallas, mientras que los términos de la diagonal principal pertenecen exclusivamente a las mallas 1 y 2, respectivamente.

Finalmente, determinadas las corrientes de las mallas es posible obtener la corriente $i_3$ mediante LKC en el nodo 2. En estas condiciones se puede aplicar la ley de Ohm para calcular las tensiones en los resistores.

### 3.2.2 Resumen

Como consecuencia del análisis presentado, es posible hacer un resumen de acciones a tomar para el análisis, consistente en los tres pasos siguientes:

1.-Se asigna una corriente a cada malla.

2.-Se aplica LKT a cada malla $M_i$, aplicando la ley de Ohm para expresar las tensiones de cada rama en términos de las corrientes de malla.

3.-Se resuelve el sistema de ecuaciones hallado para obtener las corrientes de malla desconocidas.

### 3.2.3 Caso especial: *supermalla*

Sea el circuito siguiente:

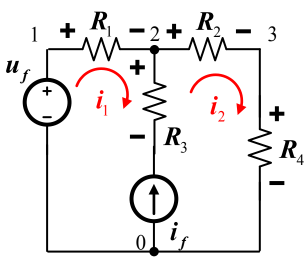



**Figura 3-6:** Caso especial. Supermalla.

La Figura 3-6 muestra un circuito que presenta una fuente de corriente en una rama común a dos mallas. Es decir que una de las corrientes concurrentes al nodo 2 es dato por lo cual, conocida una de las corrientes de malla, inmediatamente puede determinarse la otra. Entonces se está en presencia de una *supermalla*.

En este caso, pareciera ser evidente que el circuito posee dos mallas (1 y 2) por lo cual es esperable obtener dos ecuaciones de malla. Pero puede observarse que ambas mallas *no son independientes*. En efecto, la rama que contiene la fuente de corriente y que resulta común a ambas mallas presenta una corriente conocida, por lo tanto, si se determina $i_2$ es posible calcular $i_1$, y viceversa. Por lo cual, sólo es necesaria la ecuación de una de las mallas para resolver el sistema en estudio.

Esta situación puede verse como muestra la Figura 3-7

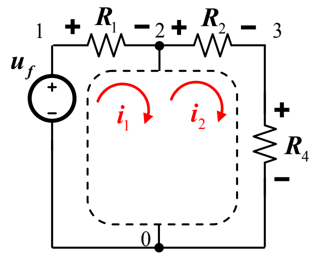



**Figura 3-7:** Circuito de la Figura 3-6 modificado para poner de manifiesto la supermalla.

Ahora se puede presentar la siguiente afirmación:

| |
|---|
| *Se obtiene una **supermalla** cuando dos mallas tienen una fuente de corriente en común.* |

Aplicando la LKT en la supermalla resulta

$$u_f = R_1 i_1 + R_2 i_2 + R_4 i_2 = R_1 i_1 + (R_2 + R_4) i_2 \qquad \text{Ec. 3-23}$$

El análisis puede completarse aplicando LKC en el nodo 2 o en el 0

$$i_f + i_1 = i_2 \qquad \text{Ec. 3-24}$$

Escribiendo el sistema en forma matricial no se observa la simetría del caso anterior, como era de esperar:

$$\begin{bmatrix} u_f \\ i_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 & R_2 + R_4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \qquad \text{Ec. 3-25}$$

No obstante, con las corrientes halladas resulta posible calcular las tensiones en todos los resistores del circuito.

## 3.3 Análisis por superposición

### 3.3.1 Introducción

El análisis por superposición implica efectuar el estudio de un circuito sobre el cual actúan más de una fuente, pero observando las consecuencias que en el mismo aparecen por efecto de cada fuente actuando por separado. Finalmente, el efecto total debido a todas las fuentes actuantes se obtiene sumando los efectos ya mencionados. Al respecto, en el estudio que sigue se aclarará el significado de "cada fuente actuando por separado".

Pero para que esto sea posible el comportamiento del circuito debe ser *lineal*.

### 3.3.2 Linealidad

Un ***circuito lineal*** es aquél cuya respuesta está linealmente relacionada con la excitación. Resulta intuitivo que un circuito lineal deba estar conformado por elementos lineales, recordando del Capítulo 1 que un elemento lineal es aquél en el cual las relaciones entre la corriente y la tensión para el caso del resistor, o la carga y la tensión en el capacitor, o la corriente y el flujo para el inductor, son lineales.

Asimismo, una fuente controlada lineal se define como un elemento cuya tensión o corriente de salida depende linealmente de una corriente o de una tensión.

Por lo tanto es posible definir en términos más generales un circuito lineal como

*aquél que se compone únicamente de fuentes independientes, fuentes controladas lineales y elementos lineales*.

A partir de esta definición se puede demostrar que la *respuesta* de un circuito es proporcional al valor de la fuente.

En base a las definiciones anteriores, es posible extender esta idea más allá de los elementos individuales, a una combinación de éstos (circuito). Sea el caso de la Figura 3-8.

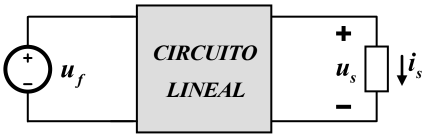



**Figura 3-8:** Circuito lineal.

El circuito de la Figura 3-8 es lineal si se cumple

$i_s = k_1 u_f$ o $u_s = k_2 u_f$

### 3.3.3 Superposición

Teniendo en cuenta lo presentado hasta el momento, es posible enunciar la *superposición* aplicada a un circuito eléctrico como:

*La corriente (o la tensión) en un elemento de un circuito **lineal** alimentado por dos o más **fuentes independientes** es igual a la suma **algebraica** de las corrientes (o de las tensiones) en dicho elemento, cada una de las cuales debida a cada fuente actuando por separado.*

Resulta muy adecuado un ejemplo para ilustrar lo enunciado.

### 3.3.4 Ejemplo de aplicación de superposición

Se desea calcular la corriente entre los puntos $A$ y $B$ del circuito de la Figura 3-9 aplicando superposición.

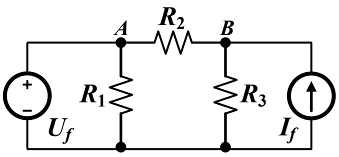



**Figura 3-9:** Circuito del ejemplo de aplicación de superposición.

Se suponen conocidas las fuentes y las resistencias.

Antes de iniciar el análisis, debe entenderse qué significa que *cada fuente actúe por separado*.

Si hay una sola fuente independiente en el circuito, resulta evidente que cualquier tensión o corriente en cierto elemento del mismo será consecuencia de la excitación impuesta por dicha fuente. Por lo tanto, si hay más de una fuente independiente cada una de ellas dará origen a una respuesta en cada elemento.

Pero si un circuito tiene varias fuentes independientes ¿cómo es posible discriminar el efecto de cada una sobre el sistema? En otras palabras, ¿es posible *anular* el efecto de todas las fuentes excepto una y a continuación determinar la respuesta buscada?

La solución surge precisamente de esta última pregunta: *anular* todas las fuentes menos la de interés, permite efectivamente obtener la respuesta del circuito a la única fuente que se mantiene activa. Si este proceso se repite para todas la fuentes independientes, entonces será posible determinar las respuestas del circuito a todas y cada una de las fuentes presentes en el mismo. Luego, la definición de superposición permite obtener la respuesta total como suma algebraica de todas las respuestas debidas a cada una de las fuentes.

Pero ahora, ¿qué significa *anular* una fuente? Resulta evidente que en este caso *anular* es sinónimo de *hacer cero*, pues dando el valor cero a una fuente se anula su efecto. Inmediatamente debe pensarse qué significa desde el punto de vista circuital anular una fuente. Una fuente de tensión de valor cero resulta equivalente a un cortocircuito, dado que la tensión en éste es cero. De manera similar, una fuente de corriente de valor cero resulta equivalente a un circuito abierto, puesto que la corriente en este último es cero.

En base a todo lo mencionado y para el caso del ejemplo, el análisis del circuito se puede resumir de la siguiente manera:

En primer lugar, se anula la fuente de tensión. Cierta bibliografía utiliza el término “pasivar” en lugar de “anular”, que deben entenderse como sinónimos; aunque, como ya se mencionó, este último resulta más gráfico e intuitivo que el primero. El circuito queda entonces como muestra la Figura 3-10.

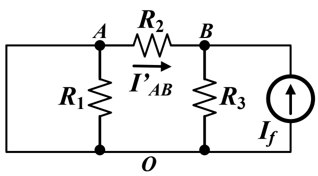



**Figura 3-10:** Circuito del ejemplo. Fuente de tensión anulada.

Teniendo en cuenta que $R_1$ está en paralelo con el cortocircuito que reemplazó a la fuente de tensión, resulta el circuito de la Figura 3-11

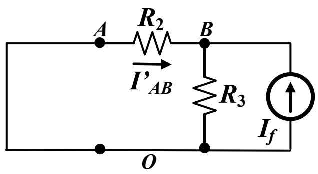



**Figura 3-11:** Circuito del ejemplo.

Se toma arbitrariamente el sentido indicado de la corriente. A continuación se plantea la división de corrientes en el nodo B:

$$I'_{AB} = -\frac{I_f \cdot G_2}{G_2 + G_3} \qquad \text{Ec. 3-26}$$

El signo negativo de la ecuación se debe al sentido elegido de la corriente respecto del de la fuente $I_f$.

El símbolo *prima* (‘) que acompaña a $I_{AB}$ identifica a la componente debida a la fuente de corriente con la fuente de tensión anulada, en este caso.

Se procede a pasivar (anular) la fuente de corriente, de acuerdo a lo comentado más arriba; esto se muestra en la Figura 3-12.

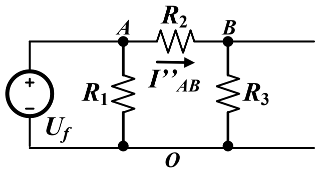



**Figura 3-12:** Circuito con la fuente de corriente anulada.

Se calcula la corriente entre $A$ y $B$ sin modificar el sentido de corriente:

$$I''_{AB} = \frac{U_f}{R_2 + R_3} \quad \text{Ec. 3-27}$$

Al igual que antes, el símbolo *segunda* (“) que acompaña a $I_{AB}$ identifica a la componente debida a la fuente de tensión con la fuente de corriente anulada, en este caso.

La corriente total resulta de la suma de las corrientes calculadas en cada paso:

$$I_{AB} = I'_{AB} + I''_{AB} = -\frac{I_f \cdot G_2}{G_2 + G_3} + \frac{U_f}{R_2 + R_3} \quad \text{Ec. 3-28}$$

# 3.4 Circuitos equivalentes. Thévenin y Norton

## 3.4.1 Introducción

En ciertas ocasiones se requiere analizar un circuito de cierta complejidad entre dos nodos particulares. Si es necesario repetir el análisis varias veces, cambiando sólo las condiciones del circuito entre dichos puntos, resulta útil simplificar el mismo fuera de dichos puntos de interés, encontrando un equivalente.

Un circuito equivalente que representa esta situación fue propuesto por primera vez en 1883 por Léon Charles Thévenin, ingeniero francés que trabajaba en la Administración de Correo, Telégrafos y Teléfonos. Posteriormente, en 1926, Edward Lawry Norton ingeniero norteamericano que se desempeñaba en los laboratorios de la compañía Bell Telephone, propone una versión dual del circuito equivalente de Thévenin.

Muchas veces la bibliografía hace referencia a estos circuitos equivalentes como *dipolos activos equivalentes* de tensión o de corriente. También es común referirse al procedimiento de determinación de dichos circuitos como *Teorema de Thévenin* o *Teorema de Norton*.

Uno de los usos principales de los circuitos equivalentes de Thévenin y de Norton es la sustitución de una parte de una red, a menudo complicada y de poco interés, por un circuito equivalente sumamente simple; generalmente asociado a una fuente real de tensión o a una fuente real de corriente, respectivamente.

En los apartados que siguen se describe cómo están conformados estos circuitos equivalentes, cómo se obtienen a partir de una red general y cómo resulta la equivalencia entre ambos.

## 3.4.2 Circuito equivalente de Thévenin

Un enunciado formal del circuito equivalente de Thévenin es el siguiente:

*Toda red lineal con fuentes independientes (**dipolo activo lineal**) "vista desde" dos puntos puede reemplazarse por una fuente de tensión en serie con una resistencia.*

Un par de cuestiones importantes pueden observarse en este enunciado. Una de ellas yafue mencionada en la introducción al tema y se refiere a que *una fuente de tensión en serie con una resistencia* no es otra cosa que una *fuente de tensión real*. La otra es el significado de *"vista desde"*. Para aclarar este punto, téngase en cuenta la Figura 3-13.




**Figura 3-13:** Dipolo activo lineal.

La *red lineal* o *dipolo activo lineal* a que hace referencia el enunciado corresponde al circuito encerrado en la caja de la Figura 3-13. Es un *dipolo*, pues tiene dos terminales, $A$ y $B$; es lineal, pues se supone que todos los elementos en su interior son lineales; es activo, pues debe contener al menos una fuente independiente, de tensión o de corriente.

Bajo estas condiciones, el interés del tema se centra en encontrar el circuito equivalente de Thévenin que presenta dicha red lineal entre los bornes $A$ y $B$ o, lo que es lo mismo, *vista desde $A$ y $B$.* Por lo tanto, el circuito equivalente de Thévenin de la red planteada vista desde $A$ y $B$ resulta como se muestra en la Figura 3-14.

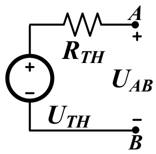



**Figura 3-14:** Circuito equivalente de Thévenin.

donde $U_{TH}$ y $R_{TH}$ son las denominadas *tensión de Thévenin* y *resistencia de Thévenin*, respectivamente.

Dado que la tensión y la resistencia de Thévenin son las incógnitas del problema, el siguiente paso es determinar sus valores.

Puede observarse del circuito de la Figura 3-14 que si se quisiera "medir" la tensión entre $A$ y $B$ el resultado inmediato es $U_{TH}$.

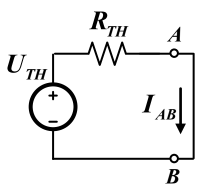



**Figura 3-15:** Circuito equivalente de Thévenin en cortocircuito.

De la misma manera, se podría "medir" una corriente de cortocircuito $I_{AB}$ entre $A$ *y* $B$ si estos terminales se unieran, tal como muestra la Figura 3-15. En consecuencia, el cociente entre las magnitudes "medidas" resultaría, por la ley de Ohm:

$$R_{TH} = \frac{U_{AB}}{I_{AB}} = \frac{U_{TH}}{I_{AB}} \qquad \text{Ec. 3-29}$$

De esta forma, resulta posible obtener los parámetros del circuito de Thévenin de una red general como la de la Figura 3-13 calculando la tensión a circuito abierto (es decir entre $A$ y $B$) dando lugar a la tensión de Thévenin; luego se calcula la corriente de cortocircuito y finalmente haciendo el cociente entre ambos resultados se obtiene la resistencia de Thévenin.

Esta situación se observa a menudo en la realidad práctica: los parámetros característicos de una máquina eléctrica, como es el caso de las reactancias de magnetización y de dispersión de transformadores, se obtienen a partir de la realización de "mediciones" de la *tensión de circuito abierto* y de la *corriente de cortocircuito* en los bornes de salida de la máquina, similares a las efectuadas en el caso expuesto; de aquí la importancia de este tema.

### 3.4.3 Circuito equivalente de Norton

Un enunciado formal del Teorema de Norton es el siguiente:

*Toda red lineal con fuentes independientes (**dipolo activo lineal**) "vista desde" dos puntos puede reemplazarse por una fuente de corriente en paralelo con una conductancia.*

Deben observarse similares consideraciones que para el caso anterior. En este caso, *una fuente de corriente en paralelo con una conductancia*es una *fuente de corriente real*. La otra es el significado de *"vista desde"*, ya expuesto.

Nuevamente, el interés del tema se centra en encontrar el circuito equivalente de Norton que presenta dicha red lineal entre los bornes $A$ y $B$ o, lo que es lo mismo, *vista desde $A$ y $B$*. Por lo tanto, el circuito equivalente de Norton de la red planteada vista desde $A$ y $B$ resulta como se muestra en la Figura 3-16.

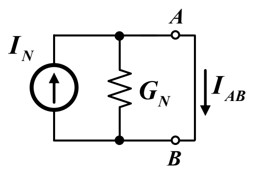



**Figura 3-16:** Circuito equivalente de Norton.

Donde $I_N$ y $G_N$ son las denominadas, *corriente de Norton* y *conductancia de Norton* respectivamente.

Debe observarse quela fuente de corriente, a partir de su definición del Capítulo 1, debe presentar su salida en cortocircuito.

Puede establecerse una relación entre las Figuras 3-16 y 3-13 de la siguiente manera, según la Figura 3-17.

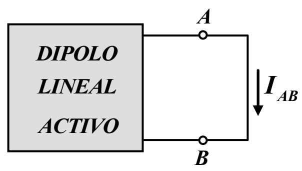



**Figura 3-17:** Dipolo activo lineal.

Continuando con el análisis, dado que la corriente y la conductancia de Norton son las incógnitas del problema, el siguiente paso es determinar sus valores.Para ello resulta útil usar los resultados obtenidos en caso anterior.

Claramente se advierte que $I_{AB}$ de las Figuras 3-16 y 3-17 debe ser igual a la corriente de Norton $I_N$ de la Figura 3-16.

Para determinar la conductancia de Norton sólo resta "medir" la tensión de circuito abierto vista desde $A$ y $B$, $U_{AB}$, con lo que se tiene:

$$G_N = \frac{U_{AB}}{I_{AB}} = \frac{U_{AB}}{I_N} \qquad \text{Ec. 3-30}$$

### 3.4.4 Equivalencia de fuentes reales

En base a lo visto, se puede establecer la equivalencia entre una *fuente de tensión real* (fuente de Thevenin) y una *fuente de corriente real* (fuente de Norton), como se observa en la Figura 3-18.

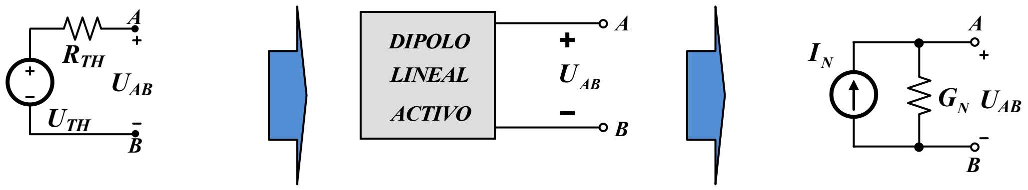



**Figura 3-18:** Fuente de Thévenin y fuente de Norton.

La Figura 3-18 muestra cómo, a partir de una fuente de Thévenin, es posible obtener una fuente de Norton, todo lo cual puede demostrarse aplicando las ideas básicas presentadas en las secciones 3.4.2 y 3.4.3.

De la misma forma, resultados similares pueden obtenerse en el caso inverso, como muestra la Figura 3-19.

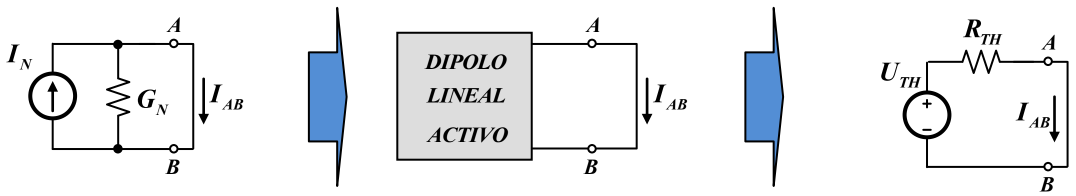



**Figura 3-19:** Fuente de Norton y fuente de Thévenin.

## 3.5 Dualidad

En el Capítulo 1 repasando el electromagnetismo fue presentado el concepto de dualidad y en el Capítulo 2 se indicaron varios ejemplos en los cuales se comprobaba dicho concepto en sucesivas presentaciones de elementos de los circuitos eléctricos y las relaciones tensión-corriente o corriente-tensión en los mismos es decir sus ecuaciones constitutivas.

En la Tabla 1 se resumen los casos que han surgido hasta ahora ya que a partir de los mismos se presentará otro método de análisis y resolución de los circuitos eléctricos.

En dicha Tabla 1 a los componentes o partes del circuito de la primera columna le corresponden las ecuaciones constitutivas o Leyes de Kirchhoff de la tercera y lo mismo entre la segunda columna y la cuarta.

**Tabla 1**

| Componente | | Ecuación constitutiva | |
|---|---|---|---|
| $R$ | $G$ | $u = R \cdot i$<br>$i = \frac{u}{R}$ | $i = G \cdot u$<br>$u = \frac{i}{G}$ |
| $L$ | $C$ | $u = L \cdot \frac{di}{dt}$<br>$i = \frac{1}{L} \cdot \int u dt$ | $i = C \cdot \frac{du}{dt}$<br>$u = \frac{1}{C} \cdot \int i dt$ |
| Circuito abierto | Corto circuito | Tensión | Corriente |
| Parte de circuito | | Leyes de Kirchhoff | |
| Paralelo | Serie | $\sum i = 0$ (1ª Ley) | $\sum u = 0$ (2ª Ley) |
| Nodo | Malla | | |

La simple observación de la Tabla 1 muestra que, por ejemplo, si se analiza el comportamiento del inductor las ecuaciones que resultan son las mismas que para el caso del capacitor pero cambiando corriente por tensión o tensión por corriente. Con igual cambio en las leyes de Kirchhoff se estudia un circuito paralelo y uno serie o lo mismo una malla y un nodo.

En definitiva los componentes y partes de un circuito de la primera columna son duales de los de la segunda columna ya que las respectivas fórmulas de estudio de la tercera y cuarta columna son formalmente las mismas cambiando corriente por tensión o viceversa.

Con lo explicado puede concluirse que si tiene las formulas correspondientes al análisis de un determinado circuito, haciendo en dichas formulas las conversiones de la Tabla 1, el resultado son las ecuaciones correspondientes al estudio del circuito dual de aquel.

Un ejemplo de lo concluido es el resultado de la fuente de tensión de Thevenin (Figura 3-14) y de la fuente de corriente de Norton (Figura 3-16) que transcriptos juntos en la Figura 3-20 muestran la dualidad entre ambos circuitos.




**Figura 3-20:** Dualidad entre la fuente de tensión de Thévenin y la fuente de corriente de Norton.

La atención de la Figura 3-20 muestra de izquierda a derecha: circuito serie dual de circuito paralelo, tensión de circuito abierto dual de corriente de cortocircuito, fuente de tensión dual de fuente de corriente, resistencia en serie dual de conductancia en paralelo. En resumen podría ampliarse la Tabla 1 con la dualidad fuente de tensión real con fuente de corriente real.

A continuación se verá una aplicación de esta característica dual teniendo en cuenta el circuito de la Figura 3-1 que ya se resolvió mediante análisis de nodos.

En la Figura 3-21 se repite dicho circuito, con otra nomenclatura para la identificación de su topología y de sus componentes, y en la Figura 3-22 el dual que resulta de aplicar con-

versiones de las columnas primera y segunda de la Tabla 1. Importa aclarar que el circuito de la Figura 3-21 también es dual del de la Figura 3-22.

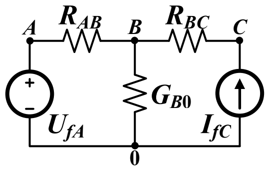



**Figura 3-21:** Circuito de la Figura 3-1

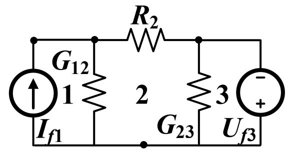



**Figura 3-22:** Circuito dual del de la Figura 3-21

Las identificaciones en los componentes del circuito de la Figura 3-21 están referidas a los nodos indicados con letras, mientras que las correspondientes a los componentes del circuito de la Figura 3-22 están referidas las mallas indicadas con números.

La Tabla 2 muestra algunas de las dualidades entre los circuitos presentados en las Figuras 3-21 y 3-22 dejando al lector verificar las no indicadas y completar la tabla mencionada.

**Tabla 2**

| Circuito de la Figura 3-21 | Circuito de la Figura 3-22 |
|---|---|
| Fuente de tensión real $U_{fA}$ $R_{AB}$ en serie | Fuente de corriente real $I_{f1}$ $G_{12}$ en paralelo |
| Tres nodos $A$ $B$ y $C$ | Tres mallas 1 2 3 |
| Nodo $B$ | Malla 2 |
| $G_{B0}$<br>Conductancia en derivación asociada al nodo $B$ | $R_2$<br>Resistencia en serie asociada a la malla 2 |
| Fuente de corriente $I_{fC}$ en serie con $G_{12}$ | Fuente de tensión $Uf3$ en paralelo con $G_{23}$ |

Con la nomenclatura usada para identificar los componentes del circuito de la Figura 3-21 (nomenclatura totalmente valida y que facilita visualizar las correlaciones duales) la Ec. 3-5 que da la fórmula para calcular la tensión entre los nodos $B$ y 0 (dado se consideró el nodo 0 con potencial nulo se la identifica simplemente con $B$) resulta:

$$U_B = \frac{U_{fA} + I_{fC} R_{AB}}{1 + R_{AB} G_{B0}} \qquad \text{Ec. 3-31}$$

La tensión calculada es dual de la corriente en $R_2$, por lo que la fórmula de cálculo de esta corriente se obtiene cambiando en la Ec. 3-31 cada una de sus partes por las duales del circuito de la Figura 3-22 como muestra la Ec. 3-32.

$$I_2 = \frac{I_{f1} + U_{f3} G_{12}}{1 + G_{12} R_2} \qquad \text{Ec. 3-32}$$

Obviamente sería interesante comprobar la Ec. 3-32 mediante, por ejemplo, análisis de mallas aplicado al circuito de la Figura 3-2, comprobación que se alienta haga el lector, que por otra parte demuestra que análisis de mallas y análisis de nodos son duales (una correlación más a completar en la Tabla 1).

Dos detalles importantes en la aplicación de estas características de dualidad.

Primero, se debe tener cuidado con los sentidos de corriente y polaridades de la tensión de las correspondientes fuentes en cada uno de los circuitos.

Por ejemplo, en el circuito de la Figura 3-22, la fuente de tensión $U_{f3}$ debe tener la polaridad que se indica para que el circuito sea dual.

En efecto, dado que en el nodo $B$ la suma de las corrientes en las dos ramas activas determina la corriente en la restante rama pasiva, se debe cumplir que en la malla $2$ (dual del nodo $B$) también la suma de las tensiones de las ramas activas de la tensión fije la tensión en la restante rama pasiva. El mismo cumplimiento es satisfecho si se invierten el sentido de $I_{f1}$ y la polaridad de $U_{f3}$ la fuente de tensión, con lo que surge otro circuito dual con tensiones y corrientes cambiadas de signo. Ambas comprobaciones son sencillas.

Segundo, dos circuitos duales tienen las mismas fórmulas para describir su funcionamiento pero con las conversiones de tensión y corriente, de topología y de componentes que ya se explicaron. Correctamente utilizadas, estas fórmulas permiten el cálculo de circuitos equivalentes, o sea aquel que reemplaza al original sin que el resto del circuito se entere (Ejemplo los circuitos de Thevenin y Norton).

Por último, contestar la pregunta que pudo estar rondando en todos los análisis hechos sobres este ejemplo de circuito particular ¿Por qué en las fórmulas de cálculo de ambos circuitos duales no aparecen ni $R_{BC}$ ni $G_{23}$?

Si se presta atención, tanto $I_{fC}$ fija la corriente en $R_{BC}$ independiente de cuanto valga $R_{BC}$ como $U_{f3}$ fija la tensión en $G_{23}$ independiente de cuanto valga $G_{23}$. O sea, en la aplicación de la 1ª Ley de Kirchhoff en el nodo $B$ y en la aplicación de la 2ª Ley de Kirchhoff en la malla $2$ no importa cuánto valgan ambos elementos pasivos. Como ambas aplicaciones de las Leyes de Kirchhoff es el inicio de los análisis de nodos y mallas para la resolución de cada uno de los circuitos la respuesta está finalizada.

# CAPÍTULO 4
# Circuitos con tensiones y corrientes senoidales

Los circuitos estudiados a lo largo de los capítulos anteriores sólo contenían tensiones y corrientes continuas, es decir que no varían con el tiempo. En este caso la sencillez de su análisis resulta evidente, en parte porque los únicos elementos pasivos que forman parte de tales circuitos son resistores.

Es fácil entender por qué en los circuitos en continua en estado permanente sólo hay resistores cuando se observa que $du/dt = 0$ y $di/dt = 0$.

Si ahora las magnitudes de las fuentes del circuito varían con el tiempo, es posible vislumbrar el amplio campo de posibilidades nuevas que se hacen presentes; se hace evidente que se ponen de manifiesto los elementos pasivos de circuito en los cuales $du/dt \neq 0$ y $di/dt \neq 0$ causan su efecto.

Para transmitir información se precisa usar magnitudes que cambien con el tiempo. Aunque no siempre las corrientes y tensiones variables con el tiempo se utilizan con este objeto, se ha aceptado en forma general el uso del vocablo *señal* para describir cualquier tensión, corriente u otras magnitudes similares, variable con el tiempo.

Desde el punto de vista de un circuito eléctrico, se puede considerar a las *señales* como funciones con las cuales se va a *excitar* al mismo para obtener de éste una *respuesta*.

Partiendo de esta afirmación, es posible incluir en la definición de *señal* a la continua, aun cuando se ha puesto de manifiesto que dicha definición es aceptada, en principio, a aquéllas que son función del tiempo.

En particular, en este capítulo se van a estudiar circuitos con señales de tensión y corriente de forma *senoidal*, las cuales tienen una aplicación especial. El uso de este tipo de señales en la práctica se debe a la sencillez de su generación, así como la sencillez de su análisis en circuitos mediante el uso de números complejos.

## 4.1 Señal alterna senoidal

### 4.1.1 La función senoidal

La señal *continua* se representa con una función constante independiente del tiempo. Es decir la gráfica de dicha señal versus el tiempo resulta una recta paralela al eje de abscisas.

En cambio, la función *senoidal* depende del tiempo y en caso de referirse por ejemplo a una tensión, puede expresarse como indica la Ec. 4-1.

$$u(t) = U_{máx} \cdot sen(\omega t \pm \psi) \qquad \text{Ec. 4-1}$$

Los parámetros de la ecuación precedente, siendo también válida la versión *coseno*, se explicitan en la Tabla 4-1

**Tabla 4-1:** Parámetros de la señal alterna senoidal

| Nomenclatura | $U_{máx}$ | $\omega = 2\pi f$ | $f = 1/T$ | $T$ | $\psi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Denominación | amplitud | pulsación | frecuencia | período | fase inicial |
| Unidad | V (volt) | rad/s (radián/segundo) | Hz (hertz) | s (segundo) | rad (radián) |

Recordando que:

- la frecuencia $f$ indica cuantas alternancias idénticas de la señal en cuestión hay en un segundo;
- el periodo $T$ corresponde al tiempo de duración de dicha alternancia.
- la pulsación $\omega$, análoga a una velocidad angular, multiplicada por el tiempo $t$ da un ángulo $\alpha$ variable, que permite el cálculo de la función trigonométrica de la Ec. 4-1;
- la fase inicial $\psi$, sumada con su signo al ángulo arriba comentado, determina el valor particular de la Ec. 4-1 para $t = 0$.

La Ec. 4-1, operaciones matemáticas de por medio, puede convertirse en la Ec. 4-2, en la cual se cambio la función *seno* por *coseno* y el dato de la fase inicial se transformó en el tiempo $t_\psi$.

$$u(t) = U_{máx} \cdot cos\left(\omega\left(t \pm \psi/\omega\right)\right) = U_{máx} \cdot cos\left(\omega\left(t \pm t_\psi\right)\right) \qquad \text{Ec. 4-2}$$

Como ejemplo, para $u(t)$ con $f = 50$ Hz y los restantes valores expresados en la Tabla 4-2 (el ángulo de fase inicial se indica también en grados sexagesimales, de uso más habitual):

**Tabla 4-2:** Valores de los parámetros para el ejemplo

| $U_{máx}$ | $\omega = 2\pi f$ | $f = 1/T$ | $\psi$ | | $t_\psi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 100 | 314,159 | 20 | ±π/5 | ±36 | ±2 |
| V | rad/s | ms | rad | º | ms |

Así resultan los dos gráficos que se muestran en las Figuras. 4-1 y 4-2, según el signo de la fase inicial, y expresados en función del tiempo.

Siendo frecuente confundirse, es importante notar en estos gráficos que para $t_\psi$ positivo se obtiene argumento nulo del coseno para tiempo negativo (equivalente al máximo) y viceversa.

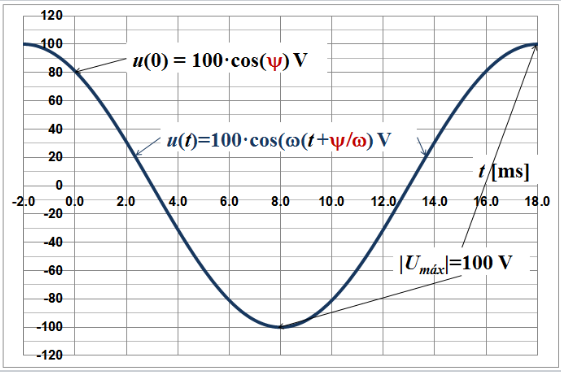



**Figura 4-1** gráfico de la Ec. 4-2 en función del tiempo y para $t_\psi = 2$ ms

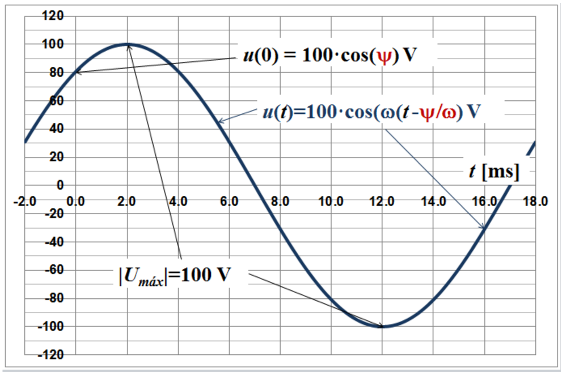



**Figura 4-2** gráfico de la Ec. 4-2 en función del tiempo y para $t_\psi = -2$ ms

Si se tiene en cuenta la presentación más arriba realizada de α, y para la fase inicial negativa como ejemplo, puede reescribirse la Ec. 4-1 como muestra la Ec. 4-3

$$u(t) = U_{máx} \cdot cos(\alpha - \psi) \qquad \text{Ec. 4-3}$$

cuya gráfica se aprecia en las Figuras 4-3 y 4-4, con escalas para el eje de abscisas en radian y grado sexagesimal, respectivamente.

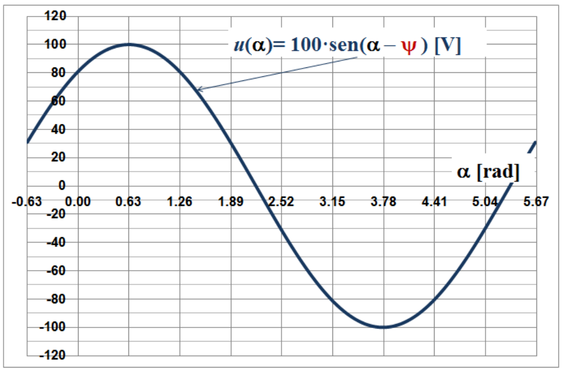



**Figura 4-3** gráfico de la Ec. 4-3 en función de α en radian y para $\psi = \pi/5$ rad

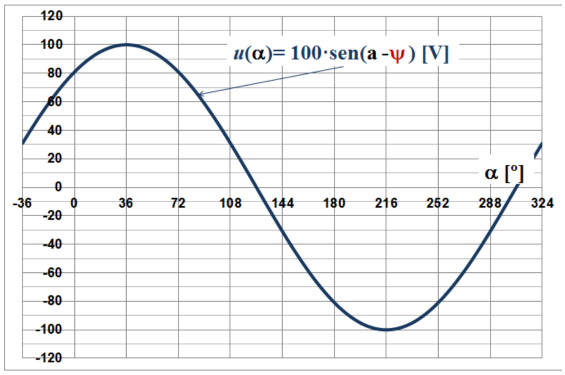



**Figura 4-4** gráfico de la Ec. 4-3 en función de α en grado sexagesimal y para $\psi = 36º$

En los gráficos mostrados se aprecia que la fase inicial ψ, o su versión temporal $t_\psi$, determina que para $t = 0$ la señal tiene un valor diferente al máximo que le corresponde al coseno para argumento nulo y a partir del cual dicha función decrece. Si la fase inicial se suma (Figura 4-1) el arranque decreciente de la onda recién comentado se da antes de la referencia $t = 0$ o, lo que es lo mismo decir que la onda se *adelanta*. En cambio, si la fase inicial se resta (Figura 4-4) la consecuencia es que la onda se *retrasa*.

Si se hubiera planteado como expresión de la señal alterna senoidal la función *seno,* vale el análisis anterior teniendo en cuenta que esta función senoidal es la función *coseno* desfasada en atraso $\pi/2$ o, para el ejemplo propuesto de $f$=50 Hz, $t_\psi$ = 5 ms.

### 4.1.2 Valor medio instantáneo

Es sabido que el valor medio de señales periódicas, representadas por funciones trigonométricas, calculadas en un periodo da resultado nulo.

Una extensión más general del concepto anterior es el valor medio instantáneo, que se verá depende del tiempo, y que para una función $F(t)$ se determina a partir de la Ec. 4-4.

$$F_{med}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t F(t)\cdot dt \qquad \text{Ec. 4-4}$$

Si $F(t) = cos(\omega t + \psi)$, que para valores adecuados del parámetro $\psi$ puede transformar $F(t)$ en seno o coseno, el valor medio instantáneo es el resultado mostrado por la Ec. 4-5

$$F_{med}(t) = \frac{1}{\omega t}\int_0^t cos(\omega t + \psi)\cdot d\omega t = \frac{sen(\omega t + \psi) - sen(\psi)}{\omega t} \qquad \text{Ec. 4-5}$$

La Figura 4-5 muestra la gráfica de las ecuaciones anteriores con $\psi = \pi/5$ rad o $\psi$ = 36°.

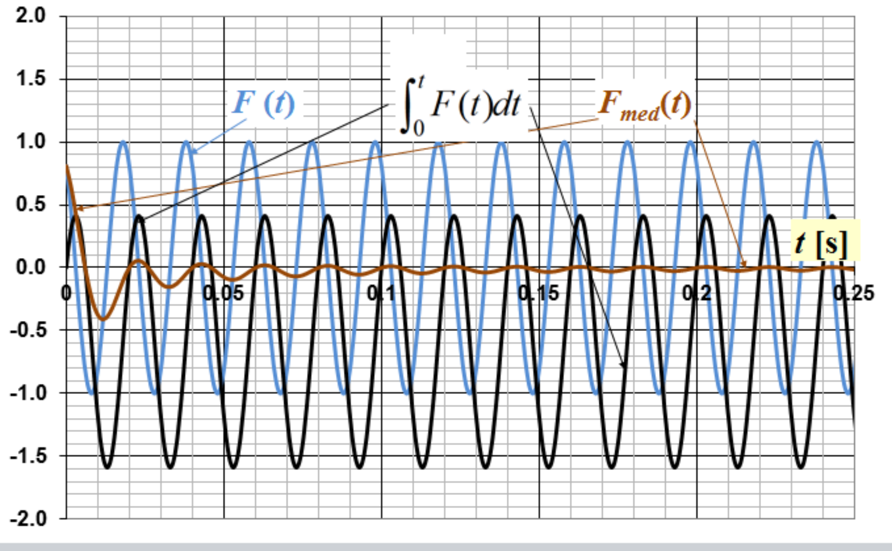



**Figura 4-5**

Resulta fácil verificar que que $F_{med}(0) = cos\,(\psi)$ y se aprecia que $F_{med}(t)$ es nulo para $t = n\cdot T$, con n entero, por lo ya indicado respecto de que el valor medio en un periodo es cero.

Por otro lado, para $t \to \infty$, $F_{med} \to 0$. Sin embargo de la Figura 4-5 surge que para tiempo mayor que 25 $T$ (igual a 0, 5 s para $f$ = 50 Hz) ya el valor medio es despreciable. Este detalle es equivalente a decir que, para una señal alterna senoidal "permanentemente" establecida o iniciada mucho tiempo atrás, el valor medio resulta nulo. Además, este valor nulo es independiente de la amplitud, la frecuencia y la fase inicial de la señal periódica senoidal, por lo tanto es poco significativo.

Una opción de parámetro medio instantáneo más relevante se estudia a continuación.

### 4.1.3 Valor medio cuadrático instantáneo

A diferencia del valor medio instantáneo ya visto, el valor medio cuadrático instantáneo de una función del tiempo $F(t)$ se determina a partir de la Ec. 4-6.

$$F_{mc}(t)=\sqrt{\frac{1}{t}\cdot\int_0^t F^2(t)\cdot dt} \qquad \text{Ec. 4-6}$$

Se aprecia de la definición que, previo a la integración, la función se eleva al cuadrado con lo que se consigue que dicha integral resulte siempre positiva.

Si nuevamente, $F(t) = cos(\omega t + \psi)$, el valor medio cuadrático instantáneo es el resultado mostrado por la Ec. 4-7.

$$F_{mc}(t)=\sqrt{\frac{1}{\omega t}\int_0^t cos^2(\omega t+\psi)\cdot d\omega t}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{sen(2(\omega t+\psi))-sen(2\psi)}{2\omega t}\right)} \qquad \text{Ec. 4-7}$$

La Figura 4-6 muestra la gráfica de algunos aspectos de la Ec. 4-7 para $\psi = \pi/5$ rad o $\psi = 36º$.

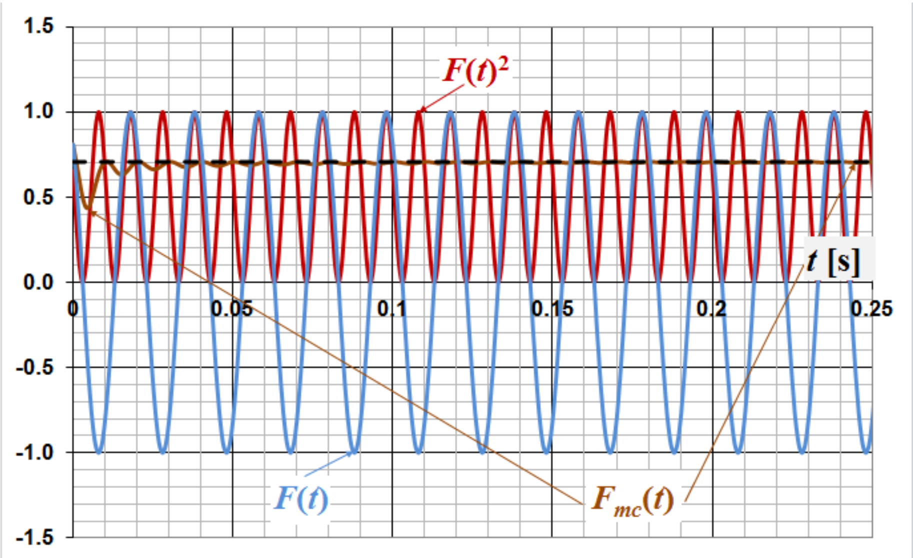



**Figura 4-6**

También resulta fácil verificar que $F_{mc}(0) = 0{,}5\cdot(1+cos\ (2\psi))$ y apreciar que $F_{mc}(t)=\sqrt{2}/2$ (valor numérico marcado en la Figura 4-6 con la línea punteada) en este caso para todo $t = n\cdot T/2$, con n entero y para $t\to\infty$ $F_{mc}\to\sqrt{2}/2$.

También, de la Figura 4-6 surge que para tiempo mayor de 0,25 s (para $f = 50$ Hz) dicho valor ya casi no difiere de $\sqrt{2}/2$, es decir que este valor numérico es el que corresponde para una señal alterna senoidal permanente y también es independiente de la frecuencia y de $\psi$ de la señal periódica senoidal.

Si la señal no es de valor unitario, sino $U_{máx}$ o $I_{máx}$ según corresponda a $u(t)$ o a $i(t)$, el valor medio cuadrático resulta $\sqrt{2}/2\cdot U_{máx}$ y $\sqrt{2}/2\cdot I_{máx}$ respectivamente, o sea depende de la amplitud de la señal periódica senoidal.

## 4.2 Excitaciones y respuestas

Teniendo en cuenta la interpretación matemática de la Ec. 4-1 y su resultado gráfico en las Figuras. 4-1 a 4-4, se estudiará a continuación cuál es el efecto de aplicar tensión o corriente senoidal a los tres componentes pasivos.

Dicha aplicación se conoce como *excitación* (sea tensión o corriente), es decir una *causa*, cuya *consecuencia* o efecto es una *respuesta* (siendo indistinto referirse como tal a una tensión o una corriente). En general, ante una excitación de tensión se espera como respuesta la corriente y viceversa.

En los ejemplos sucesivos se estudiará cómo resulta la respuesta ante una excitación senoidal en los distintos componentes pasivos y algunas de su combinaciones considerando $f = 50\ \mathrm{Hz}$ o $T = 20\ \mathrm{ms}$.

### 4.2.1 Resistor

Se estudiarán dos casos, el de la Figura 4-7 en el que un resistor de resistencia $R$ es excitado en serie con una corriente $i_f(t) = I_{máx} \cdot sen(\omega t + \psi)$ y el de la Figura 4-8, también un resistor pero de conductancia $G$, excitado en paralelo con un tensión $u_f(t) = U_{máx} \cdot sen(\omega t + \psi)$.

En estos dos ejemplos y en los de la sección 4.2.2, como opción de la otra alternativa para la señal senoidal, se considerará la función *seno*.

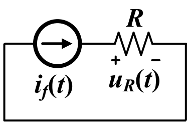



**Figura 4-7**

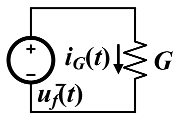



**Figura 4-8**

Para el primer, caso aplicando la Ley de Ohm la respuesta es $u_R(t) = i_f(t) \cdot R = I_{máx} R \cdot sen(\omega t + \psi) = U_{Rmáx} \cdot sen(\omega t + \psi)$ (Figura 4-7).

Para el segundo caso, también Ley de Ohm mediante, la respuesta es $i_G(t) = u_f(t) \cdot G = U_{máx} G \cdot sen(\omega t + \psi) = I_{Gmáx} \cdot sen(\omega t + \psi)$ (Figura 4-8).

Se comprueba en ambos casos, obviamente duales, que excitación y respuesta son señales senoidales sin diferencia de fase entre ellas, o sea *en fase*. También se comprueba que el valor máximo de la respuesta resulta, en ambos casos, equivalente a aplicar la ecuación constitutiva del resistor (ley de Ohm) con el valor máximo de la excitación.

Considerando $R = 30\ \Omega$ e $I_{máx} = 10\ \mathrm{A}$, la Figura 4-9 muestra la gráfica de un periodo del primer caso planteado, en función del tiempo. Por otro lado la Figura 4-10 muestra la gráfica, también de un periodo, del segundo caso con $G = 33{,}3\ \mathrm{mS}$ e $U_{máx} = 30\ \mathrm{V}$, pero en función del ángulo expresado en radián. Para ambas gráficas $\psi = \pi/5\ \mathrm{rad} = 36°$.

En estas gráficas y en las que siguen, donde se muestran *causas* y *efectos*, siempre las causas son referidas al eje de ordenadas de la derecha

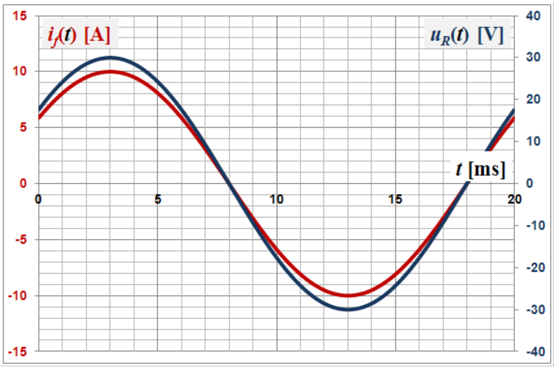



Figura 4-9

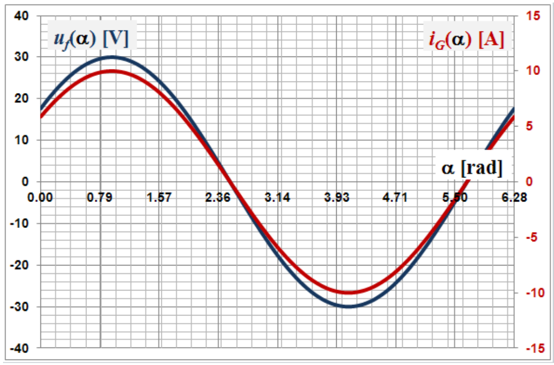



Figura 4-10

En la gráfica de la Figura 4-10, como ya se dijo, la señal se da en función del ángulo, el que con rigor matemático debe expresarse en radián. Sin embargo es cierto que es más fácil interpretar la magnitud de un ángulo si se expresa en grado sexagesimal, razón por la cual, salvo casos que lo ameriten o resulten de obvio entendimiento, se usará esa última unidad de medida angular.

Sabiendo ya cómo resulta la corriente y/o la tensión en un resistor ante la aplicación de una tensión y/o corriente alterna senoidal y teniendo en cuenta lo visto en el Capítulo 3 respecto a que la potencia eléctrica en cualquier elemento de circuito resulta ser el producto de la tensión por la corriente en dicho elemento, resulta un nuevo enfoque conceptual para el valor medio cuadrático.

Realizando el producto antedicho para cualquiera de los dos casos analizados resulta

$$p_R(t) = i_f(t)u_R(t) = i_f(t)i_f(t)R = i_f^{\,2}(t)R$$

ó

$$p_G(t) = u_f(t)i_G(t) = u_f(t)u_f(t)G = u_f^{\,2}(t)G$$

Si el valor de $R$ o de $G$ del resistor es unitario, el valor medio instantáneo de la potencia es el cuadrado del valor medio cuadrático instantáneo de la corriente o de la tensión alterna senoidal. Es decir, vale $I_{máx}^{\;2}/2$ ó $U_{máx}^{\;2}/2$ tanto si se calcula para un periodo $T$ como también para la señal permanentemente establecida como ya se vio al final de la Sección 4.1.3.

Ahora, para el primer caso, y también con $R = 1\,\Omega$, si se aplica una corriente continua cuyo valor es $I = \sqrt{2}/2\, I_{máx}$, numéricamente la potencia resulta $P = I^2 = I_{máx}^{\;2}/2$. Igual razonamiento vale para el segundo caso con $G = 1\,\mathrm{S}$, pero aplicando una tensión continua $U = \sqrt{2}/2\, U_{máx}$, resultando $P = U^2 = U_{máx}^{\;2}/2$.

En definitiva, el cuadrado de una corriente o tensión continua con valor igual al valor medio cuadrático de una corriente o tensión alterna senoidal da como resultado una potencia en continua igual a la potencia media en alterna en un periodo o para la señal en estado permanente.

Este detalle físico final determina que el valor medio cuadrático pase a denominarse *valor eficaz*, el cual se utilizará a partir de ahora.

Por otra parte, dado que este valor eficaz para la corriente o la tensión alterna senoidal es una constante, su expresión es $I_{ef}$ o $U_{ef}$ según corresponda.

Si $R$ o $G$ fueran distintos del valor unitario y establecida la corriente o la tensión alterna desde hace mucho tiempo, la expresión general de la potencia media es $I_{ef}{}^2R$ o $U_{ef}{}^2G$ en cada caso.

### 4.2.2 Inductor

La Figura 4-11 muestra un inductor de inductancia $L$ excitado en serie con una corriente $i_f(t) = I_{máx}{\cdot}sen(\omega t{+}\psi)$ y la Figura 4-12, el mismo inductor excitado en paralelo con una tensión $u_f(t) = U_{máx}{\cdot}sen(\omega t{+}\psi)$.

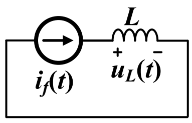



Figura 4-11

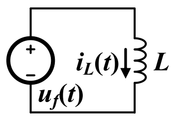



Figura 4-12

Para el circuito serie, la respuesta se obtiene a partir de una de las ecuaciones constitutivas para el inductor, $u_L\left(t\right) = L\dfrac{d}{dt}i_f\left(t\right)$, con resultado:

$$u_L\left(t\right) = \omega L \cdot I_{máx}cos\left(\omega t+\psi\right) = \omega L \cdot I_{máx}sen\left(\omega t+\psi+\frac{\pi}{2}\right)$$

Para el circuito paralelo, considerando que el valor de la energía en el inductor es nula en $t$ = - $\infty$, o lo que es lo mismo corriente nula, y teniendo en cuenta la otra ecuación constitutiva para el inductor, $i_L\left(t\right) = \dfrac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} u_f\left(t\right)\cdot dt$, la respuesta resulta:

$$i_L\left(t\right) = \frac{1}{\omega L}\int_{-\infty}^{t} U_{máx}sen\left(\omega t+\psi\right)\cdot d\omega t = -\frac{U_{máx}}{\omega L}cos\left(\omega t+\psi\right)\Bigg|_{-\infty}^{t} = -\frac{U_{máx}}{\omega L}cos\left(\omega t+\psi\right)$$

$$i_L\left(t\right) = \frac{U_{máx}}{\omega L}sen\left(\omega t+\psi-\frac{\pi}{2}\right)$$

Se comprueba en ambos circuitos, que *excitación* y *respuesta* son señales senoidales con diferencia de fase entre ellas $\pi/2 \text{ rad} = 90°$.

Respecto al valor máximo de la respuesta de tensión (Figura 4-11), éste resulta $U_{máx} = \omega L \cdot I_{máx}$, mientras que el valor máximo de la respuesta de corriente (Figura 4-12) el resultado es $I_{máx} = \dfrac{U_{máx}}{\omega L}$, comprobándose que ambas expresiones tienen el mismo formato que la Ley de Ohm ya utilizada para el caso del resistor.

Este formato, por analogía con las versiones resistiva y conductiva, determina que $\omega L$, con dimensión $[\Omega]$, pasa a denominarse *reactancia inductiva* y se sintetiza $X_L$ y $\frac{1}{\omega L}$, con dimensión $[S]$, pasa a denominarse *susceptancia inductiva* y se sintetiza $B_L$.

Para las ilustraciones siguientes se considera $L$ = 16,3 mH, con lo que $X_L = 2\pi f \cdot L = 5{,}2\,\Omega$ y $B_L = \frac{1}{2\pi f \cdot L} = 192{,}3\,\text{mS}$. Además $I_{máx} = 10\,\text{A}$ y $U_{máx} = 52\,\text{V}$.

La Figura 4-13 muestra la gráfica de un periodo del circuito serie inductivo en función del ángulo, ahora expresado en grado sexagesimal, y por otro lado la Figura 4-14 muestra la gráfica, también de un periodo, del circuito paralelo inductivo pero en función del tiempo.

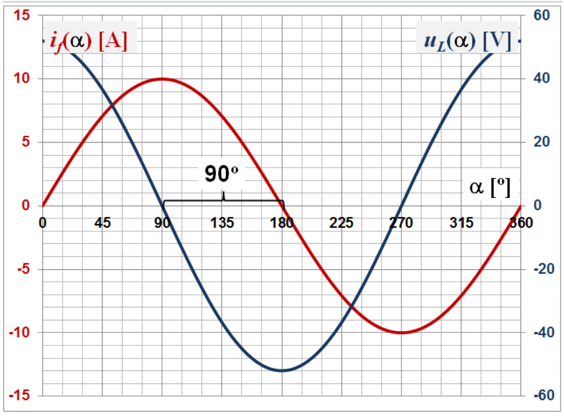



Figura 4-13

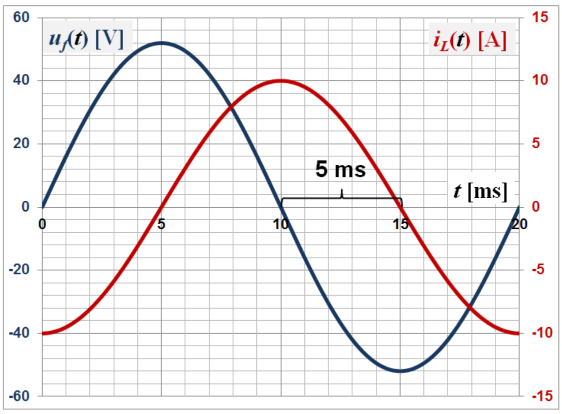



Figura 4-14

Para ambas gráficas se considera $\psi = 0°$ y en los dos casos puede apreciarse que la corriente resulta atrasada respecto de la tensión, o sea que la onda representativa de dicha corriente pasa por cero decreciendo, un ángulo 90º mayor (Figura 4-13), o pasa por cero creciendo, un tiempo $T/4 = 5\,\text{ms}$ después (Figura 4-14).

Este atraso de la corriente es consecuencia de que hasta que no pase el tiempo para integrar la tensión y resulte un flujo magnético, no puede haber corriente como lo muestra el análisis del caso del circuito paralelo.

Por último, establecida la corriente senoidal en un inductor, ya sea por una fuente o como consecuencia de una tensión también senoidal, como se vio en el Capítulo 2, la energía en cualquier instante en el mismo es $w(t) = \frac{1}{2} L \cdot i(t)^2$.

Es fácil verificar que el valor medio de esta energía, nuevamente para un periodo $T$, como también para la señal permanentemente establecida, resulta $W_{med} = \frac{1}{2} L \cdot I_{ef}{}^2$.

### 4.2.3 Capacitor

La Figura 4-15 muestra un capacitor de capacitancia $C$ excitado en paralelo con una tensión $u_f(t) = U_{máx}\,cos(\omega t + \psi)$ y la Figura 4-16, el mismo capacitor excitado en serie con un corriente $i_f(t) = I_{máx}\,cos(\omega t + \psi)$.

Para este componente, y con la única intención de tratar en forma general el tema, el estudio vuelve a plantearse mediante una señal descripta por la función coseno.

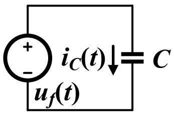



Figura 4-15

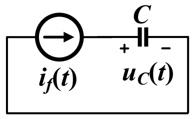



Figura 4-16

Los dos casos a estudiar son duales de los dos casos estudiados para el inductor por lo que el texto que sigue es “una copia” de la explicación correspondiente, pero cambiando capacitor por inductor, tensión por corriente y serie por paralelo y viceversa en las dos opciones, además de atender a que la causa es la función coseno. En definitiva, para el circuito paralelo, la respuesta se obtiene a partir de una de las ecuaciones constitutivas para el capacitor, $i_C(t) = C\frac{d}{dt}u_f(t)$, con resultado:

$$i_C(t) = -\omega C \cdot U_{máx} sen(\omega t + \psi) = \omega C \cdot U_{máx} cos\left(\omega t + \psi + \frac{\pi}{2}\right)$$

Para el circuito serie, también considerando que el valor de la energía en el capacitor es nula en $t$ = - $\infty$, o lo que es lo mismo tensión nula, y teniendo en cuenta la otra ecuación constitutiva para el capacitor, $u_C(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_f(t) \cdot dt$, la respuesta resulta:

$$u_C(t) = \frac{1}{\omega C}\int_{-\infty}^{t} I_{máx} cos(\omega t + \psi) \cdot d\omega t = \frac{I_{máx}}{\omega C} sen(\omega t + \psi)\Bigg|_{-\infty}^{t} = \frac{I_{máx}}{\omega C} sen(\omega t + \psi)$$

$$u_C(t) = \frac{I_{máx}}{\omega C} cos\left(\omega t + \psi - \frac{\pi}{2}\right)$$

Igualmente se comprueba, que *excitación* y *respuesta* son señales senoidales con diferencia de fase entre ellas $\pi/2 \text{ rad} = 90°$.

Respecto al valor máximo de la respuesta de corriente (caso de la Figura 4-15), éste resulta $I_{máx} = U_{máx} \cdot \omega C$, mientras que el valor máximo de la respuesta de tensión (caso de la Figura 4-16), el resultado es $U_{máx} = \frac{I_{máx}}{\omega C}$. También ambas expresiones tienen el mismo formato que la Ley de Ohm, como se vio en el caso del resistor y del inductor.

En este caso del capacitor la analogía determina que $\omega C$, con dimensión $[\text{S}]$, pasa a denominarse *susceptancia capacitiva* y se sintetiza $B_C$ y $1/\omega C$, con dimensión $[\Omega]$, pasa a denominarse *reactancia capacitiva* y se sintetiza $X_C$.

En la Figura 4-17 se muestra la gráfica de un periodo del circuito paralelo en función del ángulo, nuevamente en grado sexagesimal, y por otro lado, en la Figura 4-18 se muestra la gráfica también de un periodo del circuito serie, en función del tiempo. Para las ilustraciones se considera $C = 159{,}15\ \mu\text{F}$ ($B_C = 50\ \text{mS}$ y $X_C = 20\ \Omega$), $U_{máx} = 20\ \text{V}$ e $I_{máx} = 10\ \text{A}$.

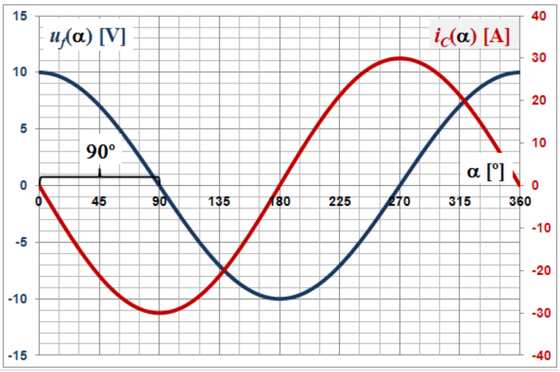



**Figura 4-17**

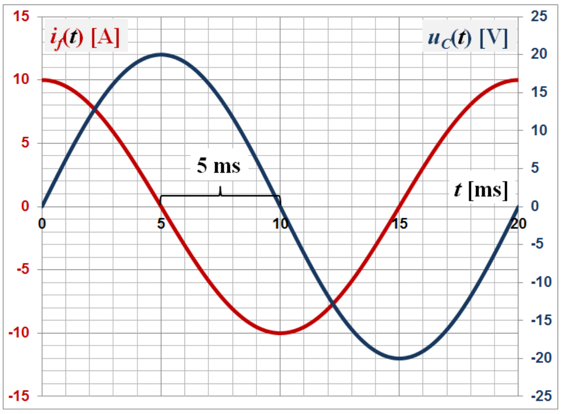



**Figura 4-18**

También para ambas gráficas se considera $\psi = 0°$ y nuevamente se cumple dualidad. En los dos casos puede apreciarse que la tensión resulta atrasada respecto de la corriente, o sea que la onda representativa de dicha tensión pasa por cero decreciendo, un ángulo $90°$ mayor (Figura 4-17) o, lo que es lo mismo, pasa por cero decreciendo, un tiempo $T/4 = 5\ \text{ms}$ después (Figura 4-18).

Por último este atraso de la tensión es consecuencia de que hasta que no pase el tiempo para integrar la corriente y resulte carga eléctrica en el capacitor, no puede haber tensión como lo muestra el análisis del circuito serie.

Para cerrar esta sección se propone al lector realizar los comentarios duales correspondientes a la afirmación $W_{med} = \frac{1}{2} C \cdot U_{ef}^{\ 2}$.

### 4.2.4 Combinaciones RL serie y GC paralelo

Las Figuras 4-19 y 4-20 muestran, respectivamente, la combinación resistor de resistencia $R$ e inductor de inductancia $L$ excitados en serie por una corriente $i_f(t) = I_{máx} sen(\omega t + \psi)$, y la combinación resistor de conductancia $G$ y capacitor de capacitancia $C$ excitados en paralelo con una tensión $u_f(t) = U_{máx} \cos(\omega t + \psi)$.

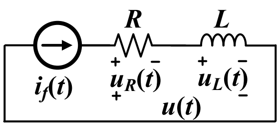



**Figura 4-19**

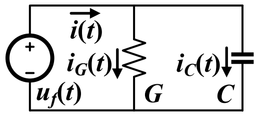



**Figura 4-20**

Para el primer caso (circuito serie de la Figura 4-19) la respuesta es $u(t)$, es decir la tensión que $i_f(t)$ causa al "activar" los elementos pasivos.

A partir de la 2ª Ley de Kirchhoff $u(t) = u_R(t) + u_L(t)$, y con lo concluido respectivamente en el estudio de los circuitos de las Figuras 4-7 y 4-11 al aplicar corriente a $R$ y a $L$ y la definición de la reactancia inductiva, la tensión en cuestión resulta la de la Ec. 4-8.

$$u(t) = I_{máx} R \cdot sen(\omega t + \psi) + I_{máx} X_L \cdot \cos(\omega t + \psi) \qquad \text{Ec. 4-8}$$

Lo anterior muestra que la respuesta en estudio es también senoidal, por lo que se puede proponer que dicho resultado se obtenga de la comparación con el de la Ec. 4-9.

$$u(t) = U_{máx} \cdot sen(\omega t + \psi + \phi) = U_{máx}\left[sen(\omega t + \psi) \cdot cos(\phi) + cos(\omega t + \psi) \cdot sen(\phi)\right] \qquad \text{Ec. 4-9}$$

De dicha comparación propuesta resultan las siguientes igualdades:

$$U_{máx} \cdot cos(\phi) = I_{máx} \cdot R$$

$$U_{máx} \cdot sen(\phi) = I_{máx} \cdot X_L$$

y de las cuales surge lo indicado en las Ec. 4-10 y 4-11.

$$U_{máx} = I_{máx} \cdot \sqrt{R^2 + X_L^{\,2}} \qquad \text{Ec. 4-10}$$

$$tg(\phi) = \frac{X_L}{R} \qquad \text{Ec. 4-11}$$

Por lo que, como conclusión, ante la excitación de $i_f(t) = I_{máx} sen(\omega t + \psi)$ la respuesta es la propuesta en la Ec. 4-9, $u(t) = U_{máx} \cdot sen(\omega t + \psi + \phi)$, con los datos dados por las Ec. 4-10 y 4-11.

Antes de mostrar los resultados gráficos de lo explicado, se puede analizar el caso del circuito paralelo de la Figura 4-20, apreciando que el mismo es la versión dual del primero. Por lo tanto resulta fácil plantear la conclusión resultante para el segundo caso haciendo los cambios $i_f(t)$ por $u_f(t)$, $u(t)$ por $i(t)$, $R$ por $G$ y $L$ por $C$.

A los efectos de querer hacer la comprobación de dicha conclusión sin hacer dualidad, vale lo ya visto en el estudio de los circuitos de las Figuras 4-8 y 4-12 con la aplicación de tensión a $G$ y a $C$, junto a la definición de la susceptancia capacitiva y la excitación de tensión con función coseno.

En definitiva, para el caso de la Figura 4-20, ante la excitación $u_f(t) = U_{máx} \cdot cos(\omega t + \psi)$, la respuesta es $i(t) = I_{máx} \cdot cos(\omega t + \psi + \phi)$, con los datos que se indican en las Ec. 4-12 y 4-13.

$$I_{máx} = U_{máx} \cdot \sqrt{G^2 + B_C^{\,2}} \qquad \text{Ec. 4-12}$$

$$tg(\phi) = \frac{B_C}{G} \qquad \text{Ec. 4-13}$$

Nuevamente se comprueba en ambos casos, que *excitación* y *respuesta* son señales senoidales pero ahora con diferencia de fase entre ellas dadas por el ángulo $\phi$ que satisface las Ec. 4-11 y 4-13 según el caso. El valor de este ángulo ahora cumple $0 < \phi < \pi/2$, acercándose a cero a medida que la parte reactiva disminuye y al otro extremo si la parte no reactiva es mucho menor que la reactiva, situaciones límites ya vistas en las secciones 4.2.1, 4.2.2 y 4.2.3.

Respecto a los valores máximos de la respuesta de tensión y de la respuesta de corriente, dados respectivamente por las Ec. 4-10 y 4-12, sigue comprobándose que ambas expresiones tienen el formato que la Ley de Ohm.

En el primer caso estudiado, $\sqrt{R^2 + X_L^{\,2}}$ con dimensión $[\Omega]$, pasa a denominarse *impedancia inductiva*, debido a la participación del inductor y se sintetiza con $Z_L$.

En el segundo caso, $\sqrt{G^2 + B_C{}^2}$ con dimensión $[S]$, pasa a denominarse *admitancia capacitiva*, ahora debido a la participación del capacitor, y se sintetiza con $Y_C$.

En la Figura 4-21 se muestra la gráfica de un periodo de tensión y corriente del circuito resistivo-inductivo serie con $X_L = 5{,}2\,\Omega$, $R = 30\,\Omega$, $\phi = 60º$ e $I_{máx} = 10\,A$.

La Figura 4-22 es la gráfica de un periodo de tensión y corriente del circuito conductivo-capacitivo paralelo, con $B_C = 1{,}192\,S$, $G = 1\,S$ y $U_{máx} = 10\,V$.

Ambos gráficos son en función del ángulo en grado sexagesimal y nuevamente considerando $\psi = 0°$.

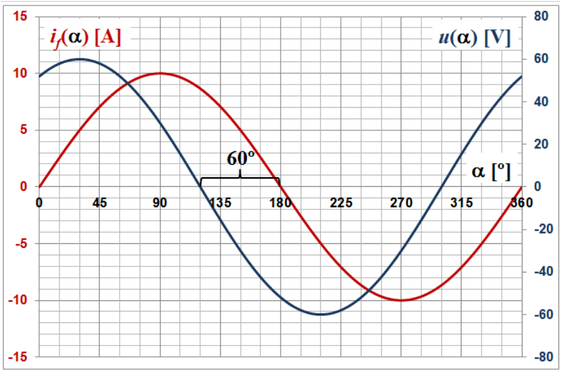



Figura 4-21

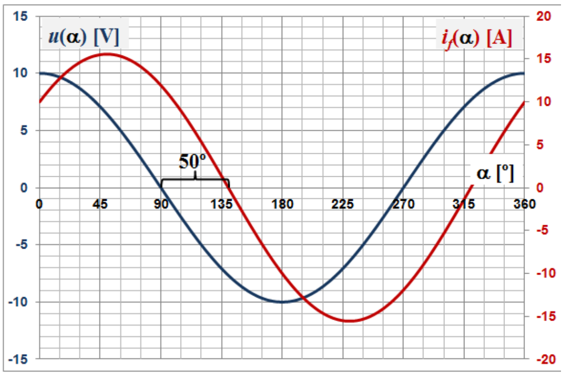



Figura 4-22

## 4.2.5 Combinación RLC serie

La Figura 4-23 muestra la combinación resistor de resistencia $R$, inductor de inductancia $L$ y capacitor de capacitancia $C$ conectados en serie y excitados por una corriente $i_f(t) = I_{máx} sen(\omega t + \psi)$.

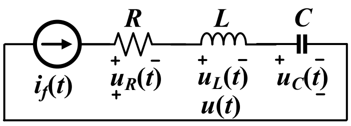



Figura 4-23

En este caso, $i_f(t)$ causa sendas tensiones en los elementos pasivos determinando, a partir de la 2ª Ley de Kirchhoff, $u(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t)$.

Teniendo en cuenta las fórmulas obtenidas en las secciones 4.2.1, 4.2.2 y 4.2.3 [6] para cada una de las tensiones parciales, la suma de las mismas resulta la mostrada en la Ec. 4-14.

$$u(t) = I_{máx} R \cdot sen(\omega t + \psi) + I_{máx} X_L \cdot cos(\omega t + \psi) - I_{máx} X_C \cdot cos(\omega t + \psi) \qquad \text{Ec. 4-14}$$

La Ec. 4.13 puede rescribirse como la 4-15

$$u(t) = I_{máx} R \cdot sen(\omega t + \psi) + I_{máx}(X_L - X_C) \cdot cos(\omega t + \psi) \qquad \text{Ec. 4-15}$$

Procediendo igual que en la sección 4.2.4, método de ejecución que se sugiere realice el lector, puede comprobarse que

[6] Para la aplicación del resultado de la tensión capacitiva se debe observar que en la sección 4.2.3 la causa es coseno.

$$u(t) = U_{máx} \cdot sen(\omega t + \psi + \phi)$$

con los datos indicados en las Ec. 4-16 y 4-17.

$$U_{máx} = I_{máx} \cdot \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \qquad \text{Ec. 4-16}$$

$$tg(\phi) = \frac{X_L - X_C}{R} \qquad \text{Ec. 4-17}$$

Para esta situación más general respecto a los elementos reactivos, surgen dos detalles:

- La impedancia resulta $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$.
- El desfasaje entre la tensión y la corriente varía entre $-\pi/2 < \phi < +\pi/2$.

El desfasaje es negativo cuando en la Ec. 4-15 el numerador es negativo, como consecuencia de ser más notable el efecto capacitivo respecto del inductivo y resultando la tensión total atrasada de la corriente. El valor límite $-\pi/2$ se da para $R$ nula.

El desfasaje es positivo cuando en la Ec. 4-15 el numerador es positivo, como consecuencia de ser más notable el efecto capacitivo respecto del inductivo y resultando la tensión total adelantada de la corriente. El valor límite $+\pi/2$ también se da para $R$ nula.

Por último, si $X_L = X_C$, el efecto reactivo es nulo y la tensión resulta obviamente en fase con la corriente.

La Figura 4-24 muestra la gráfica de un periodo de la corriente y la tensión en función del ángulo, en grado sexagesimal, siendo $\psi = 0°$ y $X_L > X_C$ tal que $\phi = 60°$.

La Figura 4-25 muestra la gráfica, también de un periodo de la corriente y la tensión en función del ángulo y en grado sexagesimal, pero siendo $\psi = 60°$ y para el caso $X_C > X_L$ tal que $\phi = \text{-}60°$.

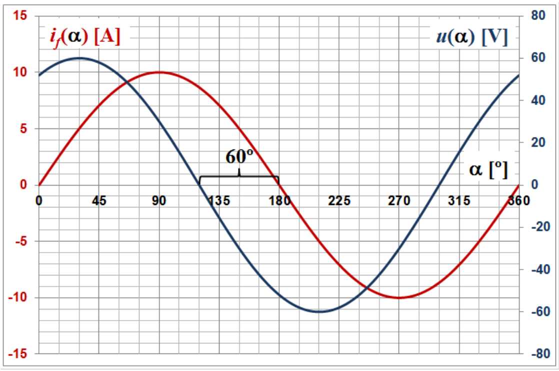



**Figura 4-24**

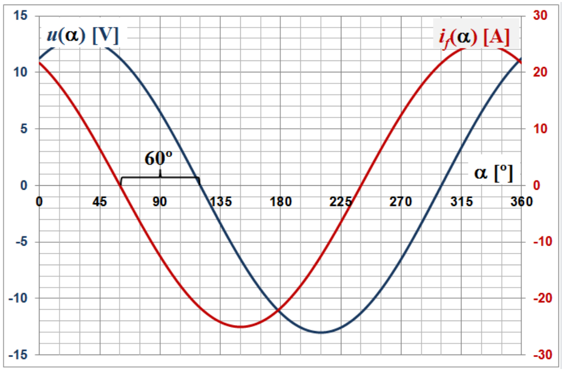



**Figura 4-25**

Aplicando dualidad puede ampliarse el panorama obteniendo los resultados para un circuito $GCL$ paralelo excitado con una fuente de tensión.

En la Tabla 4-3 se resumen las relaciones de entre máximos de tensión y corriente (o viceversa) para excitaciones y respuestas alternas senoidales para los tres componentes pasivos estudiados y los nuevos conceptos resultantes, sus denominaciones y unidades.

**Tabla 4-3**

| | | | |
|---|---|---|---|
| IMPEDANCIA<br>$[\Omega]$ | $Z=\sqrt{R^2+(X_L-X_C)^2}=\frac{U_{máx}}{I_{máx}}$ | ADMITANCIA<br>$[S]$ | $Y=\sqrt{G^2+(B_C-B_L)^2}=\frac{I_{máx}}{U_{máx}}$ |
| RESISTENCIA<br>$[\Omega]$ | $R=\frac{U_{máx}}{I_{máx}}$ | CONDUCTANCIA<br>$[S]$ | $G=\frac{I_{máx}}{U_{máx}}$ |
| REACTANCIA INDUCTIVA<br>$[\Omega]$ | $X_L=\omega L=\frac{U_{máx}}{I_{máx}}$ | SUSCEPTANCIA INDUCTIVA<br>$[S]$ | $B_L=\frac{1}{\omega L}=\frac{I_{máx}}{U_{máx}}$ |
| REACTANCIA CAPACITIVA<br>$[\Omega]$ | $X_C=\frac{1}{\omega C}=\frac{U_{máx}}{I_{máx}}$ | SUSCEPTANCIA CAPACITIVA<br>$[S]$ | $B_C=\omega C=\frac{I_{máx}}{U_{máx}}$ |

Y por último, vale la pena recordar que los formatos resultantes resumidos, son el motivo por el que históricamente se generalizó esas formas de cálculo como Ley de Ohm en alterna.

## 4.3 FASOR

Las operaciones matemáticas que involucran funciones senoidales se simplifican notablemente mediante el uso de *fasores*.

Dado que el fasor es una función matemática en el dominio de los *números complejos*, cabe recordar algunos aspectos significativos de este tipo de números incluyendo su nomenclatura normalizada de identificación.

Un número complejo es un punto el plano complejo, plano que se compone con los números *reales* en el eje horizontal y con los números *imaginarios* en el eje vertical. El eje imaginario es análogo al de los reales, pero multiplicado por $i=\sqrt{-1}$.

En el ámbito de las disciplinas que involucran la corriente eléctrica, dado que usa la letra “$i$” para su identificación, el anterior factor de multiplicación se remplaza por la letra “$j$”.

Con esta aclaración de cambio de nomenclatura matemática, un número complejo se identifica con un literal subrayado, en la cual a modo de ejemplo el literal usado es la letra $C$ inicial de complejo. Las versiones de número complejo utilizadas en el análisis de circuitos son las dos siguientes

- Binómica, $\underline{C} = a + j\cdot b$, donde $a$ y $b$ son respectivamente las componentes real e imaginaria del complejo. O sea $a = \mathrm{Re}\,(\underline{C})$ y $b = \mathrm{Im}\,(\underline{C})$.
- Polar, $\underline{C} = |\underline{C}|\cdot e^{j\theta}$ donde $|\underline{C}|$ y $\theta$ son, respectivamente, el módulo y el argumento (ángulo) del complejo. Otra nomenclatura sintética de esta versión es $\underline{C} = |\underline{C}|\ \underline{|\phi}$.

Y siendo la vinculación entre los parámetros de ambas versiones la expresión $|\underline{C}|=\sqrt{a^2+b^2}$.

Otra nomenclatura muy utilizada para expresar el módulo es simplemente $C$. Además, $tg(\phi)=b/a$, $a=|\underline{C}|\cdot cos(\phi)$ y $b=|\underline{C}|\cdot sen(\phi)$.

La Figura 4-26 ilustra lo inmediatamente arriba repasado, donde el segmento cuya medida representa el módulo, es el de una flecha que se puede usar gráficamente para indicar el punto que representa a $\underline{C}$.

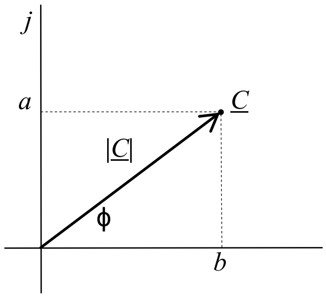



**Figura 4-26:** Representación de $\underline{C}$ en el plano complejo

Si ahora se considera que el complejo $\underline{C}$ es función del argumento, el que a su vez depende del tiempo según $\alpha = \omega \cdot t$ (donde $\omega$ es en este caso una velocidad angular), el punto representativo de $\underline{C}$ establece en el plano complejo el lugar geométrico correspondiente a una circunferencia por la que pasa reiteradamente $\underline{C}$, iniciando en la ubicación que muestra la Figura 4-26. Esta nueva característica funcional para el complejo es lo que se entiende por *fasor*, el que se indica con $\dot{U}$.[7]

Este nuevo operador matemático puede considerarse indistintamente función del ángulo o del tiempo y cuando alguno de estos casos deba quedar explícito, la indicación del fasor será $\dot{U}(\alpha)$ ó $\dot{U}(t)$ ó en general $\dot{U}(\omega t + \psi)$.

Si se aplica la versión binómica (o también cartesiana) a esta particular expresión de un complejo, indicando intencionalmente el módulo como $U_{máx}$, resulta la Ec. 4-18,

$$\dot{U}(\omega t + \psi) = U_{máx} \cdot cos(\omega t + \psi) + j \cdot U_{máx} \cdot sen(\omega t + \psi) \qquad \text{Ec. 4-18}$$

y se verifican las siguientes propiedades mostradas en las Ec. 4-19 y 4-20

$$\text{Re}\left[\dot{U}(\omega t + \psi)\right] = U_{máx} \cdot cos(\omega t + \psi) \qquad \text{Ec. 4-19}$$

$$\text{Im}\left[\dot{U}(\omega t + \psi)\right] = U_{máx} \cdot sen(\omega t + \psi) \qquad \text{Ec. 4-20}$$

Si ahora se aplica la versión polar (o también exponencial) resulta la Ec. 4-21,

$$\dot{U}(\omega t + \psi) = U_{máx} \cdot e^{j(\omega t + \psi)} = U_{máx} \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j\psi} \qquad \text{Ec. 4-21}$$

en la que se distinguen las tres componentes siguientes :

- $U_{máx}$ : Módulo del fasor.
- $e^{j\omega t}$ : Fasor de módulo unitario (argumento variable).
- $e^{j\psi}$ : Complejo de módulo unitario y argumento constante.

Esto último se puede apreciar gráficamente en la Figura 4-27.

[7] Es importante aclarar que en numerosa bibliografía sobre este tema suele usarse el formato de letra en negrita para indicar a un fasor.

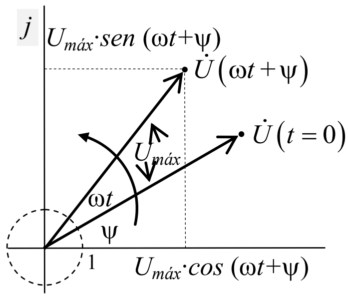



**Figura 4-27:** Representación de fasores en el plano complejo

En la Figura 4-27 están representados también dos fasores, ambos con igual módulo $U_{máx}$ pero con distinto argumento, para el primero $\psi$ y para el segundo $\psi$ más un ángulo definido por el producto de la velocidad de giro $\omega$ por el tiempo $t$ en que se da ese giro con el sentido anti horario indicado por la flecha curva.

La circunferencia punteada resulta el lugar geométrico del fasor unitario $e^{j\omega t}$ y $\dot{U}(t = 0) = \underline{U}(\psi)$.

Se puede concluir, por lo anteriormente expuesto y en particular por las Ec. 4-19 y 4-20, que existe una correspondencia entre el fasor y las funciones senoidales tanto coseno como seno.

La elección intencional de la denominación del módulo como $U_{máx}$ podría haber sido $I_{máx}$, con lo cual, funciones armónicas representativas de una tensión o corriente alterna senoidal son equivalente a sendos fasores.

Se presentan a continuación algunas propiedades de los fasores vinculadas con esa interesante equivalencia y relacionadas con los ejemplos trigonométricos ya vistos.

### 4.3.1 Multiplicación de un fasor por un número real.

La operación da el resultado que sigue donde se comprueba que en el fasor multiplicado sólo se modifica el módulo sin afectar la fase.

$$\dot{I}(\omega t + \psi) \cdot R = I_{máx} \cdot e^{j(\omega t + \psi)} \cdot R = I_{máx} \cdot R \cdot e^{j(\omega t + \psi)} = U_{máx} \cdot e^{j(\omega t + \psi)} = \dot{U}(\omega t + \psi) \qquad \text{Ec. 4-22}$$

$$\dot{U}(\omega t + \psi) \cdot G = U_{máx} \cdot e^{j(\omega t + \psi)} \cdot G = U_{máx} \cdot G \cdot e^{j(\omega t + \psi)} = I_{máx} \cdot e^{j(\omega t + \psi)} = \dot{I}(\omega t + \psi) \qquad \text{Ec. 4-23}$$

Las dos formulaciones duales presentadas en las Ec. 4-22 y 4-23 se relacionan con lo ya visto en la sección 4.2.1. En efecto, la determinación de la parte imaginaria de los fasores de la Ec. 4-22 son las funciones armónicas analizadas en el estudio del circuito de la Figura 4-7 y lo mismo con los fasores de la Ec. 4-23 y el circuito de la Figura 4-8.

Por otra parte se verifica $\dot{U}(\omega t)/\dot{I}(\omega t) = R$ ó $\dot{I}(\omega t)/\dot{U}(\omega t) = G$ según la formulación elegida.

La Figura 4-28 muestra los fasores en el plano complejo en $t = 0$ y para la misma fase inicial que en la sección 4.2.1. Obviamente, ambos fasores están en fase y giran en el plano con velocidad angular $\omega$.

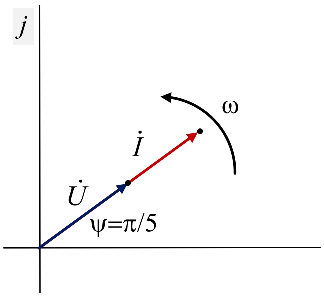



**Figura 4.28:** Representación de fasores en el plano complejo

Un buen ejercicio que se propone al lector es obtener las componentes imaginaria para sucesivos valores de $t$ completando un giro de $2\pi$, graficarlas en función de $t$ y comprobar que resultan las funciones armónicas de las Figuras 4-13 y 4-14.

### 4.3.2 Multiplicación de un fasor por un número imaginario

En este caso la operación determina que en el fasor multiplicado se modifica el módulo y también la fase como se comprueba a continuación.

$$\begin{aligned}\dot{I}(\omega t+\psi)\cdot jX_L &= I_{máx}e^{j(\omega t+\psi)}e^{j\pi/2}X_L = I_{máx}X_L e^{j(\omega t+\psi+\pi/2)} \\ &= U_{Lmáx}\cdot e^{j(\omega t+\psi+\pi/2)} = \dot{U}_L(\omega t+\psi+\pi/2)\end{aligned} \qquad \text{Ec. 4-24}$$

$$\begin{aligned}\dot{U}(\omega t+\psi)\cdot jB_C &= U_{máx}e^{j(\omega t+\psi)}e^{j\pi/2}B_C = U_{máx}B_C e^{j(\omega t+\psi+\pi/2)} \\ &= I_{Cmáx}\cdot e^{j(\omega t+\psi+\pi/2)} = \dot{I}_C(\omega t+\psi+\pi/2)\end{aligned} \qquad \text{Ec. 4-25}$$

En cualquiera de los ejemplos, por cierto que tendenciosos, mostrados en las Ec. 4-24 y 4-25 se aprecia que el argumento del resultado ($\dot{U}_L(\omega t+\psi)$ o $\dot{I}_C(\omega t+\psi)$) muestra un adelanto de $\pi/2$ respecto del argumento de los fasores que se multiplican ( $\dot{I}(\omega t+\psi)$ o $\dot{U}(\omega t+\psi)$).

En ambos casos los módulos se han modificado por efecto de $X_L$ y $B_C$, respectivamente, o lo que es equivalente y con más detalle, que $\dot{U}(\omega t)/\dot{I}(\omega t)=jX_L$ o $\dot{I}(\omega t)/\dot{U}(\omega t)=jB_C$ según la formulación elegida.

La representación del fasor resultante respecto al fasor inicial es la misma para ambos casos y se muestra en las Figuras 4-29 y 4-30 pero considerando $\psi=\pi/4$ para el ejemplo de la Ec. 4-24 y $\psi=0$ para el de la Ec. 4-25.

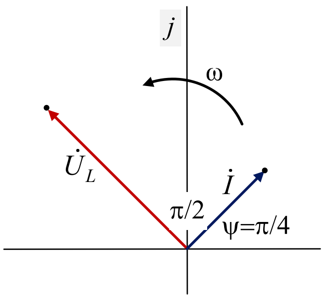



**Figura 4-29:** Representación de fasores en el plano complejo

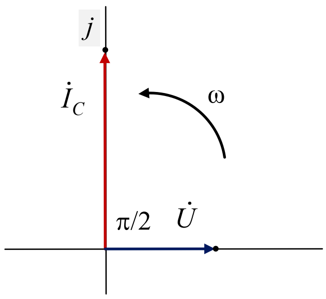



**Figura 4-30:** Representación de fasores en el plano complejo

En ambos casos, el fasor original y el fasor resultante de la multiplicación están desfasados entre sí $\pi/2\,\mathrm{rad}$, llevando la delantera el fasor resultante.

Por otra parte, basta atender a la parte imaginaria de los fasores de la Figura 4-29 para encontrarse con las funciones armónicas del circuito de la Figura 4-11 o la parte real de los fasores de la Figura 4-30 para que resulten las funciones armónicas del estudio del circuito de la Figura 4-15.

Otra propuesta para el lector es replantear la presente sección, pero considerando que se divide un fasor por un número imaginario, que es lo mismo que multiplicar por la inversa del módulo de dicho imaginario pero con cambio de signo. No será una sorpresa que el desfasaje resultante sea en atraso de $\pi/2\,\mathrm{rad}$ y puedan hacerse comparaciones equivalentes a las del párrafo anterior pero entre las curvas de las Figuras 4-14 y 4-18 y los circuitos de las Figuras 4-12 y 4-16, respectivamente.

Lo presentado en las secciones 4.3.1 y 4.3.2 permite concluir lo siguiente:

*Los fasores cuyas componentes reales o imaginarias corresponden a corrientes o tensiones senoidales de excitación, multiplicados ya sea por resistencias y/o reactancias, o conductancias y/o susceptancias respectivamente, se transforman en fasores cuya componente real o imaginaria representa la tensión o corriente senoidales de respuesta, incluido el desfasaje en los casos reactivos.*

Es decir, puede expresarse una ley de Ohm para alterna mucho más potente que la presentada para la forma trigonométrica.

### 4.3.3 Suma o resta de fasores

Teniendo en cuenta tanto la componente real como la imaginaria se comprueba fácilmente:

$$\mathrm{Re}\left[\dot{I}_1(\omega t+\psi_1)-\dot{I}_2(\omega t+\psi_2)\right]=\mathrm{Re}\left[\dot{I}_1(\omega t+\psi_1)\right]-\mathrm{Re}\left[\dot{I}_2(\omega t+\psi_2)\right] \qquad \text{Ec. 4-26}$$

$$\mathrm{Im}\left[\dot{U}_1(\omega t-\psi_1)+\dot{U}_2(\omega t-\psi_2)\right]=\mathrm{Im}\left[\dot{U}_1(\omega t-\psi_1)\right]+\mathrm{Im}\left[\dot{U}_2(\omega t-\psi_2)\right] \qquad \text{Ec. 4-27}$$

De las Ec. 4-26 y 4-27 surge que la suma o resta de dos señales senoidales de igual frecuencia y fase inicial cualesquiera, es igual a la parte real o imaginaria de la suma o resta de los fasores cuyas partes reales o imaginarias son las señales senoidales (coseno o seno) en cuestión. Es casi obvio que se reconocen en esta propiedad matemática una versión de equivalencia con las Leyes de Kirchhoff.

Al aplicar la 2ª Ley de Kirchhoff para analizar el circuito de la Figura 4-23 como consecuencia de aplicar $i_f(t)=I_{máx}sen(\omega t+\psi)$ resultó $u(t)=u_R(t)+u_L(t)+u_C(t)$. Si este planteo se realiza con fasores con las tres propiedades presentadas, los pasos a seguir serían:

1- Relacionar cada función armónica con la parte imaginaria [8] de sendos fasores como lo muestran las Ec. 4-28 y 4-29.

$$i_f(t) = \mathrm{Im}\left[I_{máx} e^{j(\omega t+\psi)}\right] = \mathrm{Im}\left[\dot{I}\right] \qquad \text{Ec. 4-28}$$

$$u_R(t) = \mathrm{Im}\left[R \cdot \dot{I}\right] \qquad u_L(t) = \mathrm{Im}\left[jX_L \cdot \dot{I}\right] \qquad u_C(t) = \mathrm{Im}\left[\dot{I}/jB_C\right] \qquad \text{Ec. 4-29}$$

2- Hacer la suma de las tensiones con el resultado siguiente:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Im}\left[R\dot{I}\right] + \mathrm{Im}\left[jX_L\dot{I}\right] + \mathrm{Im}\left[\dot{I}/jB_C\right] = \mathrm{Im}\left[R\dot{I} + jX_L\dot{I} - j\,\dot{I}/B_C\right] \\ &\mathrm{Im}\left[\dot{I}\left(R + jX_L - j/B_C\right)\right] = \mathrm{Im}\left[\dot{I}\left(R + j\left(X_L - X_C\right)\right)\right] = \mathrm{Im}\left[\dot{U}\right] \end{aligned} \qquad \text{Ec. 4-30}$$

3- Y finalmente, de la última igualdad de la Ec. 4-30, $\dot{U} = \dot{I}\left(R + j\left(X_L - X_C\right)\right)$, surge $\dot{U}/\dot{I} = R + j\left(X_L - X_C\right) = \underline{Z}$.

Un repaso a lo visto en las Ec. 4-14 y 4-15 y conclusiones siguientes y su comparación con la fórmula anterior habla por sí sola. Como otro aporte a la nomenclatura propia de este enfoque fasorial, $\underline{Z}$ se denomina *impedancia compleja* siendo su parte real la resistencia $R$ correspondiente al elemento no reactivo y la parte imaginaria la reactancia resultante $\left(X_L - X_C\right)$ de los elementos reactivos.

La Figura 4-31 muestra la gráfica de los fasores $\dot{I}$ e $\dot{U}$ para las mismas consideraciones que para el caso de la Figura 4-24. Ya no sorprende que la parte imaginaria de cada fasor sean las funciones armónicas de graficadas en esa Figura y que se compruebe que en el giro de los mismos la tensión va adelante de la corriente.

La Figura 4-32 muestra la suma de los fasores representativos de las tensiones en cada elemento pasivo en serie para obtener la tensión resultante.

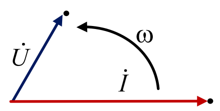



**Figura 4-31:** Representación de fasores en el plano complejo

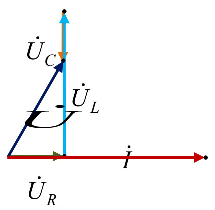



**Figura 4-32:** Representación de fasores en el plano complejo

Las Figuras 4-33 y 4-34 muestran los resultados equivalente pero para el caso graficado en la Figura 4-25. Para las mismas valen los mismos comentarios recientes, salvo que ahora en el giro del conjunto la tensión va atrás de la corriente.

[8] Podría haberse elegido la parte real, pero dado que la excitación del ejemplo es seno se opta por la parte imaginaria.

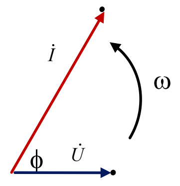



**Figura 4-33:** Representación de fasores en el plano complejo

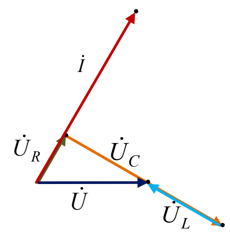


**Figura 4-33:** Representación de fasores en el plano complejo

Nuevamente se alienta la iniciativa del lector de realizar la versión dual de este último ejemplo iniciando con la 1º Ley de Kirchhoff, de la cual surgirá $\underline{Y}$, la *admitancia compleja*, y luego seguir con variantes con un solo elemento reactivo.

En definitiva, se puede concluir del presente estudio que son válidas las leyes de Kirchhoff utilizando fasores, es decir pueden sumarse las tensiones en una malla o las corrientes en un nodo operando con fasores y determinando la parte real o imaginaria al resultado según corresponda.

## 4.3.4 Derivada e integral de un fasor.

También es fácil comprobar, nuevamente teniendo en cuenta ya sea la componente real o la imaginaria, que:

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Im}\left[\dot{I}\left(\omega t+\psi\right)\right]=\mathrm{Im}\left[\frac{d}{dt}\dot{I}\left(\omega t+\psi\right)\right] \qquad \text{Ec. 4-31}$$

$$\int\mathrm{Re}\left[\dot{U}\left(\omega t+\psi\right)\right]dt=\mathrm{Re}\left[\int\dot{U}\left(\omega t+\psi\right)dt\right] \qquad \text{Ec. 4-32}$$

Las Ec. 4-31 y 4-32 ratifican conclusiones ya obtenidas con referencia a las ecuaciones constitutivas.

## 4.3.5 Detalles finales.

Demostrada completamente la equivalencia de los fasores con las señales alternas senoidales o cosenoidales y la validez de la aplicación a los mismos de las ecuaciones constitutivas y las leyes de Kirchhoff, pueden usarse las técnicas de análisis de circuitos vistas en el Capítulo 3.

En dicho capítulo la mayoría los planteos de resolución, vistos en corriente continua, culminan en sistemas de ecuaciones lineales en el dominio del álgebra de los números reales en los que intervienen corriente y/o tensiones datos (señales de excitación) y corrientes y/o tensiones incógnitas (señales de respuesta) vinculados sólo por los valores de las resistencias de los resistores del circuito, ya que los inductores se comportan como un corto circuito y los capacitores como un circuito abierto (en continua).

Ahora, en alterna, el sistema de ecuaciones que resulta del análisis del circuito será en el dominio del álgebra de los números complejos. Las señales son los fasores equivalentes de las tensiones y/o corrientes y, al manifestarse tanto resistores, como inductores y capacitores, estarán vinculados por $R$, $jX_L$, $-jX_C$, $\underline{Z}$, $G$, $jB_C$ $-jB_L$ o $\underline{Y}$, según corresponda.

En estos sistemas de ecuaciones el fasor unitario de giro $e^{j\omega t}$ termina cancelándose, por lo que resulta un estricto sistema de números complejos. En otras palabras, basta con trabajar, tomando como ilustración la Ec. 4-21, con $\underline{U} = U_{máx} \cdot e^{j\psi}$ y sobrentender el giro.

Esta situación es equivalente a detener la imagen gráfica de los fasores en un instante $t$ cualquiera, lo que da la información relevante referida a desfasajes y amplitudes que se mantienen invariables en el tiempo y con las cuales, junto a $\omega$, pueden evaluarse los resultados temporales. En estas representaciones los ejes del plano complejo pueden no estar dibujados (es el caso de las Figuras 4-31 a 4-33) pero pueden imaginarse sin inconvenientes en el caso que se quisieran determinar las componentes reales o imaginarias de los fasores.

Dos detalles para evitar malos entendidos. Uno de nomenclatura: el valor del módulo del fasor, o lo mismo del complejo, es siempre el valor máximo de la señal que representa. El otro de vocabulario: se puede efectuar el análisis y resolución analítica con fasores a la vez que se puede realizar la representación gráfica de dicho análisis y resolución, con la ventaja de que ciertos comportamientos gráficos permiten prever resultados.

Las posibilidades informáticas actuales de cálculo permiten resolver con gran eficiencia sistemas de cualquier cantidad de ecuaciones con números complejos, determinar partes reales, imaginarias, módulos de los resultados y mostrar sus gráficas. Y para estas gráficas vale el dicho de que "una imagen vale por mil palabras", dado que muestran amplitudes y desfasajes asociadas a las señales alternas en el circuito.

# CAPÍTULO 5
# Circuitos acoplados magnéticamente

Es sabido que la corriente eléctrica en un conductor da origen a un campo magnético. Si dicha corriente es variable en el tiempo y si además, en proximidades de dicho conductor, se encuentra otro conductor, se inducirá en éste último una tensión cuyo valor será función de dicho campo magnético (representado por el flujo correspondiente) a través de la ley de Faraday.

Esto quiere decir que dos circuitos (o más) pueden afectarse uno a otro debido a la interacción de los campos magnéticos que generen.

Resulta de sumo interés cuantificar esta interacción o "acción mutua" y además debe quedar clara la polaridad del efecto magnético de cada circuito sobre el otro.

Este tipo de acción se da comúnmente entre bobinas o arrollamientos preferentemente desarrollados sobre núcleos de buena característica magnética, entendiéndose por tales aquéllos cuya permeabilidad sea elevada.

A este efecto se lo suele llamar *acoplamiento magnético* y los circuitos que involucran esta característica son conocidos como *circuitos acoplados magnéticamente,* siendo la manifestación más importante de este fenómeno el *transformador*.

## 5.1 Introducción

Una corriente por una bobina devanada en un núcleo de hierro determina un flujo magnético en el mismo y otro en el aire. De esta manera, las líneas de inducción en el núcleo (en mayor cantidad por unidad de superficie que en el aire) pueden atravesar una segunda bobina devanada también sobre el núcleo y sin contacto conductivo con la primera, causante del fenómeno magnético.

Si la corriente que produce el flujo magnético es variable en el tiempo, también lo será el flujo magnético y en consecuencia se inducirá en la segunda bobina una tensión de las mismas características físicas que la autoinducida en la primera, según lo establece la ley de Faraday.

En la situación descripta, la vinculación entre la tensión productora de corriente en el primer bobinado y la tensión inducida en bornes del segundo bobinado no se realiza a través de ningún medio conductivo. La relación entre las anteriores tensiones se consigue mediante el flujo magnético que, por inducirlas, determina que los circuitos de esta naturaleza se denominen justamente *acoplados inductivamente* o simplemente *acoplados*.

Y una aclaración respecto a la nomenclatura: con el objeto de no contribuir a la contaminación visual de las expresiones matemáticas, todas las magnitudes variables en el tiempo se escribirán como corresponde en minúscula pero sin la manifestación explicita de $t$.

## 5.2 Ecuaciones magnéticas

El circuito de la Figura 5-1 muestra lo dicho. Cualquiera de los arrollamientos puede ser considerado causa del fenómeno descripto en párrafos anteriores, sin embargo es usual que el indicado con (1) (es decir el de la izquierda) sea identificado como el promotor del fenómeno.

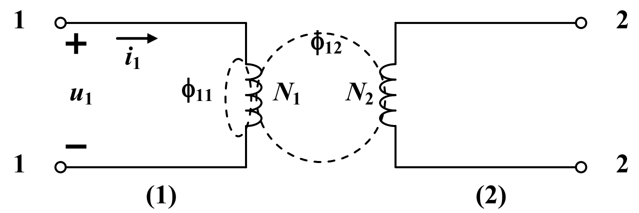



**Figura 5-1:** Circuito acoplado con la causa en el lado (1)

En consecuencia en bornes (1) una tensión $u_1$ da lugar a $i_1$, la que a su vez produce el flujo magnético total $\phi_1$. Como ya se dijo, una parte del flujo atraviesa la bobina (2) y el restante solamente circunda la bobina (1) sin afectar a la otra. Este detalle está indicado con las líneas punteadas en la Figura 5-1 y se sintetiza en:

$$\phi_1 = \phi_{11} + \phi_{12} \qquad \text{Ec. 5-1}$$

$\phi_1$ : Flujo que a través del área de cada una de las $N_1$ espiras del bobinado del lado (1).

$\phi_{11}$: La parte del anterior que afecta sólo al mismo bobinado del lado (1), también denominando *flujo propio*.

$\phi_{12}$ : La parte que producida en el bobinado del lado (1) alcanza a cada una de las $N_2$ espiras del bobinado del lado (2), llamado *flujo concatenado* o también *flujo mutuo*.

Excitando el circuito eléctrico de la derecha, es decir el (2), sucede exactamente lo mismo pero en sentido causa-efecto de (2) a (1), de modo que con sólo intercambiar los subíndices resulta:

$$\phi_2 = \phi_{22} + \phi_{21} \qquad \text{Ec. 5-2}$$

Si en ambos circuitos hay corriente, la situación magnética cambia desde el punto de vista que cada bobina es afectada, además de por el flujo creado por ella misma, por el producido por la otra y que alcanza a ésta.

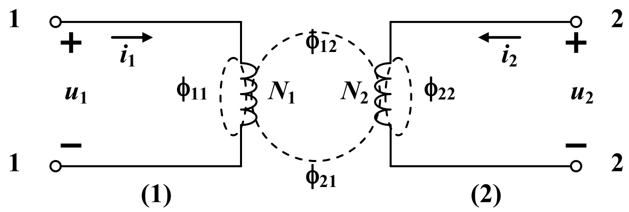



**Figura 5-2:** Circuitos acoplados con corrientes en ambos lados, (1) y (2)

Se aprecia en la Figura 5-2 que se han indicado tanto $\phi_{12}$ y $\phi_{21}$. El resultado magnético final es el siguiente:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \phi_{11} + \phi_{21} + \phi_{12} \\ \phi_2 &= \phi_{22} + \phi_{21} + \phi_{12} \end{aligned} \qquad \text{Ec. 5-3}$$

En las Ec. 5-3, $\phi_{11}$ y $\phi_{22}$ son los mismos que en las Ec. 5-1 y 5-2, ya que estos dos valores de flujo son los producidos por cada una de las corrientes en las respectivas bobinas sin afectar a la otra.

Por otra parte se verifica que existe un flujo resultante mutuo para las dos bobinas dado por:

$$\phi_{12} + \phi_{21} = \phi_{21} + \phi_{12} = \phi_M \qquad \text{Ec. 5-4}$$

Por supuesto debe entenderse, respecto de $\phi_M$, que este resulta como suma "algebraica" de los flujos; es decir nada impide, por ejemplo, que $\phi_{21}$ represente un flujo magnético cuyas líneas de inducción se oponen a las correspondiente a $\phi_{12}$.

## 5.3 Puntos homólogos

La acción de suma o resta de un flujo concatenado respecto del otro para obtener el flujo mutuo resultante depende del sentido de cada corriente por los arrollamientos de cada bobina o, para sentidos fijos de aquéllas, como se haya desarrollado cada bobinado. Es decir, si para determinados sentidos de las corrientes se verifica un aumento de flujo, significa que los sentidos de las corrientes son “entrantes” a las dos bobinas por extremos a partir de los cuales los devanados se desarrollan de igual forma.

El cambio de sentido de una de las corrientes o, sin variar éstas, devanando en forma inversa uno de los arrollamientos, determina que un flujo se oponga a otro y como resultado que $\phi_M$ sea menor que en el caso anterior.

En definitiva, los cambios relativos de sentidos de corriente y forma de devanado de los arrollamientos pueden determinar inclusive que las líneas del campo de inducción magnética cambien de sentido afectando, como se verá, la polaridad de las tensiones inducidas.

Atendiendo el aspecto geométrico, o sea la forma de devanado de los arrollamientos, puede *"marcarse"* los dos extremos de cada arrollamiento a partir del cual dicho sentido de devanado es el mismo. La referencia de esos extremos se denomina *puntos homólogos* y deben señalarse en los circuitos acoplados.

La identificación de estos puntos resulta inmediata si se puede ver la forma en que se han bobinado ambos arrollamientos. Sin embargo, en los circuitos prácticos reales esta situación puede no ser factible por lo que debe determinarse, tomando como referencia el extremo de una de las bobinas, cuál de los dos extremos de la otra es el homólogo de dicha referencia.

La mejor forma de hacer esta determinación es mediante los resultados de la polaridad de la tensión inducida en los extremos un arrollamiento en relación con la polaridad de la tensión que en el otro arrollamiento causa la corriente productora del mecanismo de acoplamiento magnético ya presentado.

La Figura 5-3 muestra dos bobinas, de $N_1$ y $N_2$ vueltas cada una, devanadas de igual forma sobre un núcleo de buenas características magnéticas que facilita el desarrollo del flujo a través del mismo en casi su totalidad, concatenando ambos arrollamientos. Los puntos marcados son obviamente los homólogos.

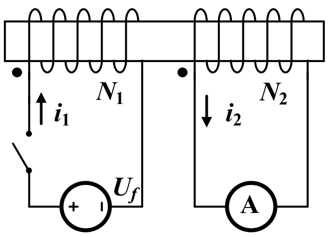



**Figura 5-3:** Determinación experimental de la ubicación de los puntos homólogos

En el extremo izquierdo de la bobina de $N_1$ vueltas, a través de un interruptor se puede aplicar tensión y establecer una corriente $i_1$. Esto determina que, luego de cerrado el interruptor, aparezca $\phi$ (con el interruptor abierto tanto $i_1$ como $\phi$ son nulos). Este cambio en el flujo induce tensión en las $N_2$ espiras de la segunda bobina, y consecuentemente, una corriente $i_2$ a través del amperímetro.

El extremo donde se aplica el borne positivo de $U_f$ en la bobina 1 y el extremo en la bobina 2 con el sentido de la corriente saliente, son los respectivos puntos homólogos. También se verifica que el punto homólogo de la bobina 2 corresponde a aquél donde resulta el positivo la polaridad de la tensión inducida por efecto de la variación de $\phi$.

Lo afirmado no puede ser de otra manera, ya que si la tensión inducida en la bobina 2 tuviera el negativo en el punto homólogo o, lo que es lo mismo, al cerrar el inductor con el amperímetro el sentido de la corriente fuera entrante a dicho punto, se produciría un aumento del flujo con el consiguiente aumento de la tensión inducida; es decir que se estaría en presencia de un fenómeno contrario a lo previsto por la ley de Lenz.

Y un último detalle fundamental: los puntos homólogos existen independientemente de la corriente y/o la tensión.

## 5.4 Coeficiente de acoplamiento

Los resultados expresados por las Ec. 5-1 y 5-2 muestran que una parte del flujo producido en una bobina *concatena* a la otra.

Si se consideran condiciones, no necesariamente idénticas para cada bobina, respecto a los caminos magnéticos donde se establece la inducción por ellas producida, es posible definir qué proporción del flujo producido en cada bobina afecta a la otra mediante:

$$k_1 = \frac{\phi_{12}}{\phi_1} \qquad\qquad k_2 = \frac{\phi_{21}}{\phi_2} \qquad\qquad \text{Ec. 5-5}$$

Suponiendo circuitos magnéticos lineales, tanto $k_1$ como $k_2$ son constantes y se los denomina *coeficientes de acoplamiento* y, en general, también se cumple que $k_1 = k_2 = k$.

Es evidente que el coeficiente de acoplamiento depende de las características geométricas y magnéticas con que se realiza el acoplamiento inductivo. En efecto, las líneas de flujo propio se cierran alrededor de cada bobina en gran parte por caminos de aire, mientras que las concatenadas se desarrollan a propósito por circuitos magnéticos de mayor permeabilidad. Cuanto más acentuada sea esta característica y además favorecida por la cercanía de las dos bobinas, más cercano a la unidad será el valor de $k$. En el caso límite $k = 1$, todo el flujo producido en una bobina afecta a la otra; en el otro extremo si $k$ es nulo significa que no hay ninguna vinculación inductiva entre las bobinas.

## 5.5 Coeficiente de inductancia mutua

Como ya se dijo, si la vinculación magnética es producida por corrientes variables en el tiempo, resultarán tanto tensiones autoinducidas como inducidas por los flujos variable ya descriptos.

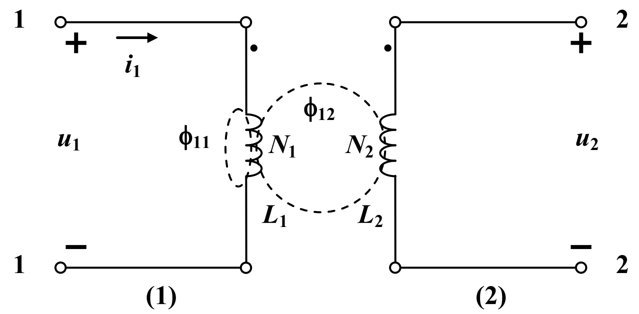



**Figura 5-4:** Otro enfoque del circuito acoplado de la Figura 5-1

La Figura 5-4 repite el circuito de la Figura 5-1 con el agregado de:

- las característica inductivas eléctricas $L_1$ y $L_2$ (autoinductancias de cada arrollamiento)
- la referencia de los puntos homólogos
- coherente con el significado de los puntos homólogos la polaridad de la tensión inducida en la bobina 2.

En el circuito se cumple:

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} \qquad \text{Ec. 5-6}$$

$$u_2 = N_2 \frac{d\phi_{12}}{dt} \qquad \text{Ec. 5-7}$$

Recordando que $L$ es un coeficiente de proporcionalidad y de adecuación de unidades entre la tensión autoinducida en un arrollamiento y la variación en el tiempo de la corriente por ella, puede definirse un coeficiente de iguales características que vincule la tensión inducida en una bobina y la variación en el tiempo de la corriente por la otra bobina. Este nuevo coeficiente se denomina de *inducción mutua*, se identifica con $M$ y permite reescribir la ecuación Ec. 5-7 como:

$$u_2 = M \frac{di_1}{dt} \qquad \text{Ec.5-8}$$

Podría repetirse el análisis hecho considerando la causa en el circuito (2) y la consecuencia en el circuito (1), con el resultado:

$$u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} \qquad \text{Ec. 5-9}$$

$$u_1 = N_1 \frac{d\phi_{21}}{dt} \qquad \text{Ec. 5-10}$$

$$u_1 = M \frac{di_2}{dt} \qquad \text{Ec. 5-11}$$

La simetría magnética determina que existe la misma vinculación de (1) a (2) que de (2) a (1).

Considerando las Ec. 5-7 y 5-8, y 5-10 y 5-11, y suponiendo circuitos magnéticos lineales, se obtiene:

$$M = \frac{N_2.\phi_{12}}{i_1} = \frac{N_1.\phi_{21}}{i_2} \qquad \text{Ec. 5-12}$$

Utilizando la definición de $k$ en la Ec. 5-12 resulta:

$$M = N_2 \frac{k.\phi_1}{i_1} = N_1 \frac{k.\phi_2}{i_2} \qquad \text{Ec. 5-13}$$

Teniendo en cuenta que $L_1 = N_1 \frac{\phi_1}{i_1}$ y $L_2 = N_2 \frac{\phi_2}{i_2}$ resulta:

$$M = k \frac{N_2}{N_1} L_1 = k \frac{N_1}{N_2} L_2 \qquad \text{Ec. 5-14}$$

De las Ec. 5-13 y 5-14 surgen dos conclusiones:

$$\frac{L_1}{L_2} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 \qquad \text{Ec. 5-15}$$

$$M = k\sqrt{L_1.L_2} \qquad \text{Ec. 5-16}$$

Es importante tener en claro que en todo el análisis hecho $L_1$ y $L_2$ son parámetros eléctricos del circuito (1) y (2) respectivamente, que tienen la vinculación matemática dada por la Ec. 5-15, con $N_1/N_2 = a$, relación que aparece reiteradamente en la prosecución del estudio de circuitos acoplados. Además la Ec. 5-16 representa el parámetro vinculante de ambos circuitos con la intervención de $k$.

Dado que la variación habitual en el tiempo, tanto de la tensión como de la corriente, es senoidal de pulsación ω, la Ec. 5-6 se transforma en la ya conocida $\underline{U}_1 = j\omega L_1 \underline{I}_1$ y de la misma forma la Ec. 5-8 en $\underline{U}_2 = j\omega M \cdot \underline{I}_1 = jX_M \cdot \underline{I}_1$. Respecto a la polaridad relativa de cada una de estas tensiones, la autoinducida $\underline{U}_1$ es positiva en el borne donde el sentido de $\underline{I}_1$ es entrante. En cambio la $\underline{U}_2$, aparece en el lado (2) (se la puede considerar como una fuente de tensión dependiente de $\underline{I}_1$ cómo se verá a continuación en el punto 5.6, con el positivo del lado del punto homólogo 2 si el sentido de $\underline{I}_1$ es entrante al punto homólogo 1 y viceversa, como se analizó en la Figura 5-3 y se planteó (para el caso de corriente con sentido entrante al punto homologo 1) en la Figura 5-4.

Esta conclusión es válida en ambos sentidos (1-2 ó 2-1) de los circuitos acoplados, inclusive si ambos lados están *activados*, es decir, tienen fuentes independientes. En este caso las corrientes resultantes no sólo dependen de dichas fuentes, sino también de las tensiones generadas por la inducción magnética.

Es importante tener en cuenta que $\underline{U}_1$ es una tensión de característica *conductiva* en $L_1$ mientras que $\underline{U}_2$ es una tensión *inducida* en el arrollamiento de $N_2$ espiras.

## 5.6 Circuito básico con acoplamiento inductivo

### 5.6.1 Circuito 2 abierto

La Figura 5-5 ilustra el caso más simple ya comentado de la Figura 5-4 con un enfoque más eléctrico con los nuevos parámetros presentados.

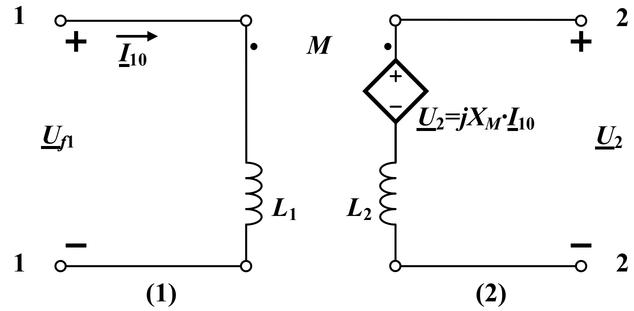



**Figura 5-5:** Circuito 2 abierto

$\underline{U}_{f1}$ hace que el circuito (1) sea *activo* y determina el sentido de $\underline{I}_{10}$ sea entrante al punto homólogo 1, por lo que aparece $\underline{U}_2$ (fuente dependiente intercalada en serie ente $L_2$ y el punto homólogo) con el positivo en el lado del punto homólogo 2. Es importante observar que $\underline{I}_2$ es nula por estar el circuito 2 abierto y en consecuencia no hay tensión autoinducida en $\underline{L}_2$; esta es la razón por la cual la corriente en el lado 1 se denomina $\underline{I}_{10}$ refiriéndose el 0 del subíndice a la condición de abierto del lado 2).

Para el caso de acoplamiento magnético perfecto, es decir $k = 1$, resulta:

$$\underline{U}_{f1} = \underline{U}_1 = \underline{I}_{10} \cdot jX_{L1} \qquad \text{Ec. 5-17}$$

$$\underline{U}_2 = \underline{I}_{10} \cdot jX_M = j\sqrt{X_{L1} \cdot X_{L2}} \qquad \text{Ec. 5-18}$$

Y teniendo en cuenta las Ec. 5-17 y 5-18 resulta

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{X_{L1}}{\sqrt{X_{L1} \cdot X_{L2}}} = \sqrt{\frac{X_{L1}}{X_{L2}}} = \frac{N_1}{N_2} = a \qquad \text{Ec. 5-19}$$

## 5.6.2 Circuito 2 cerrado con $\underline{Z}_2$

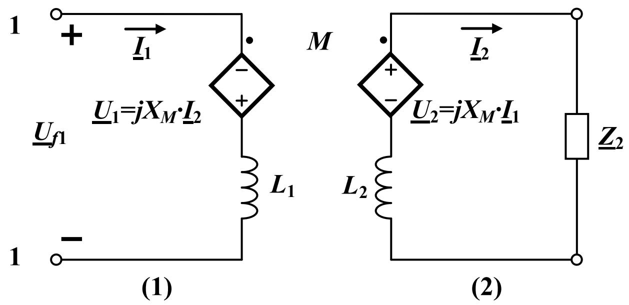



**Figura 5-6:** Circuito 2 cerrado con $\underline{Z}_2$

En la Figura 5-6, la malla (2) se cierra con $\underline{Z}_2$, y en consecuencia la $\underline{U}_2$ (producida ahora por $\underline{I}_1$) determina la existencia de $\underline{I}_2$. A su vez, esta corriente induce $\underline{U}_1 = jX_M \underline{I}_2$ con polaridad negativa en el punto homólogo 1 por ser el sentido de $\underline{I}_2$ saliente del punto homólogo 2. Si bien $\underline{I}_2$ tiende a disminuir a $\underline{\Phi}_M$, induce $\underline{U}_1$ de modo de volver a aumentarlo a través del aumento de $\underline{I}_{10}$ a $\underline{I}_1$

La aplicación de la 2ª Ley de Kirchhoff da las siguientes Ec. 5-20:

$$\underline{U}_{f1} = j\cdot\left(\underline{I}_1 X_{L1} - \underline{I}_2 X_M\right)$$
$$0 = j\cdot\left(\underline{I}_2 X_{L2} - \underline{I}_1 X_M\right) + \underline{I}_2.\underline{Z}_2$$
Ec. 5-20

Resolviendo el sistema las Ec. 5-20 resulta:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{f1}\cdot\left(\underline{Z}_2 + jX_{L2}\right)}{jX_{L1}\cdot\underline{Z}_2 - X_{L1}X_{L2} + X_M}$$
$$\underline{I}_2 = \frac{-\underline{U}_{f1}\cdot jX_M}{jX_{L1}\cdot\underline{Z}_2 - X_{L1}X_{L2} + X_M}$$
Ec. 5-21

Teniendo en cuenta $k = 1$ y las Ec. 5-17, 5-18 y 5-19, las Ec. 5-21 se transforman en

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{f1}}{jX_{L1}} + \frac{\underline{U}_{f1}\cdot jX_{L2}}{jX_{L1}\cdot\underline{Z}_2} = \underline{I}_{10} + \frac{\underline{U}_{f1}}{a^2\cdot\underline{Z}_2}$$
Ec. 5-22
$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{f1}\cdot jX_M}{jX_{L1}\cdot\underline{Z}_2} = \frac{\underline{U}_{f1}}{a\cdot\underline{Z}_2} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_2}$$

Reemplazando $\underline{I}_2 = \dfrac{\underline{U}_{f1}}{a\cdot\underline{Z}_2}$ de la segunda en la primera y como $N_1/N_2 = a$ se obtiene:

$$N_1\underline{I}_1 - N_2\underline{I}_2 = N_1\underline{I}_{10}$$ Ec. 5-23

Esta expresión muestra la reducción del flujo en el núcleo (acción *desmagnetizante*) de $N_2\underline{I}_2$, compensada por $N_1\underline{I}_1$ para mantener $N_1\underline{I}_{10}$, el que produce el $\underline{\Phi}_M$ que inicia las consecutivas inducciones mutuas.

En general $\underline{I}_{10}$ resulta pequeño en los casos de buen acoplamiento magnético, cuando se vinculan los bobinados con núcleos de hierro de elevada permeabilidad, por lo que la Ec. 5-23 se transforma en

$$\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{1}{a}$$ Ec. 5-24

Además, si se considera también $\underline{I}_{10}$ despreciable en la primera de las Ec. 5-22, $\underline{U}_{f1}$ "ve" a $\underline{Z}_2$ cómo $a^2\underline{Z}_2$, para determinar justamente $\underline{I}_1$.

Las Ec. 5-19 y 5-24 definen el comportamiento del circuito acoplado magnéticamente enfocado como *transformador*, tanto *de tensión* como *de corriente*, e inclusive *de impedancia*, y caracterizado por la *relación de vueltas* o *espiras* $N_1/N_2 = a$.

## 5.7 Otros ejemplos de resolución de circuitos acoplados

### 5.7.1 Circuitos 1 y 2 activos

El circuito de la Figura 5-7 es similar al de la Figura 5-2 en la que tanto el circuito 1 como el 2 son *activos*. Se agregan los resistores $R_1$ y $R_2$ con el objeto de generalizar el problema. En este caso, el planteo la 2° Ley de Kirchhoff en la malla (1) debe incluir la tensión inducida por $\underline{I}_2$ y otro tanto en la malla (2) teniendo en cuenta el efecto de inducción de $\underline{I}_2$.

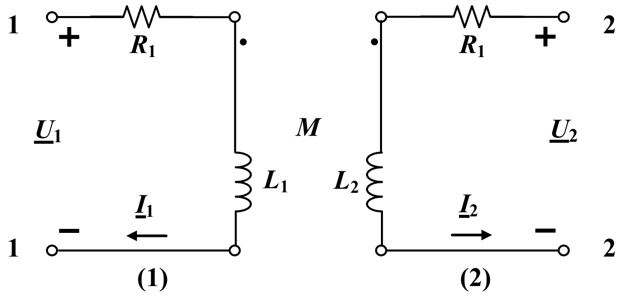



**Figura 5-7:** Circuito acoplado con ambos lados activos.

Los efectos de inducción mencionados se modelan, como en el caso de la Figuras 5-5 y 5-6, con fuentes de tensión dependientes en la Figura 5-8.

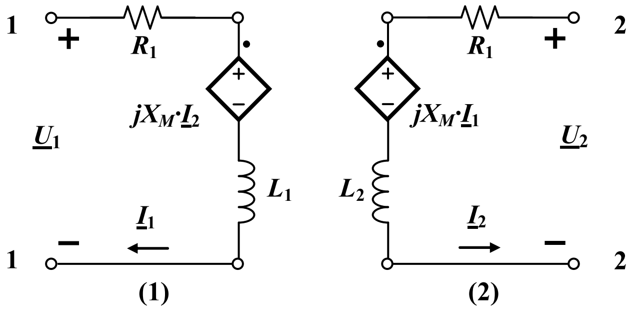



**Figura 5-8:** Modelo con fuentes de tensión dependientes

Resultan así las siguientes Ec. 5-25

Malla 1: $\underline{U}_1 = \underline{I}_1.R_1 + j\cdot\left(\underline{I}_1 X_{L_1} + \underline{I}_2 X_M\right)$

Malla 2: $\underline{U}_2 = \underline{I}_2.R_2 + j\cdot\left(\underline{I}_2 X_{L_2} + \underline{I}_1 X_M\right)$

Ec. 5-25

Cualquiera de las corrientes con sentido diferente al fijado en la Figuras 5-7 o 5-8 determina en consecuencia un cambio en la polaridad de las fuentes dependientes que ponen en clara evidencia las tensiones inducidas por el acoplamiento magnético mutuo.

## 5.7.2 Tres circuitos acoplados: dos activos y uno pasivo

En el circuito de la Figura 5-9 se combinan tres mallas acopladas magnéticamente. Dos de ellas (1 y 3) activas por efecto de sendas fuentes de tensión con acción posible sobre el sentido de las correspondientes corrientes. La malla 2, en la que se inducen tensiones desde las otras dos mallas, al estar cerrada permite la aparición de $\underline{I}_2$ cuyo sentido depende de la polaridad resultante de dichas tensiones inducidas**.**

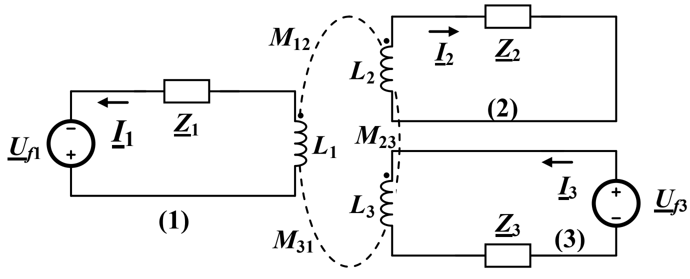



**Figura 5-9:** Tres mallas acopladas magnéticamente

El ejemplo puede analizarse haciendo algunas variantes que ayudan a terminar de clarificar el tema.

**Caso 1**

Si $k_{12} = k_{23} = 0$ $\left(M_{12} = M_{23} = 0\right)$, la malla 2 queda "desenganchada" y totalmente pasiva ($\underline{I}_2 = 0$). Las mallas 1 y 3 se analizan y resuelven como en la sección 5.7.1. En este caso, como el sentido de $\underline{I}_1$ es saliente del punto homólogo 1, la correspondiente consecuencia de tensión inducida en la malla 3 tiene la polaridad negativa en el punto homólogo 3.

**Caso 2**

Si $k_{13} = k_{23} = 0$ $\left(M_{12} = M_{23} = 0\right)$, ahora la malla 3 queda "desenganchada" pero activa $\left(\underline{I}_3 = \underline{U}_{f3}/\underline{Z}_3\right)$. La malla 2 se "activa" a través de la tensión inducida $\underline{U}_2 = jX_{M12}\underline{I}_1$, y como el sentido de $\underline{I}_1$ es saliente del punto homólogo 1, con la polaridad negativa en el punto homólogo 2. En este caso el sentido asignado a $\underline{I}_2$ es contrario al correcto.

Puede repetirse el anterior análisis, pero "desenganchando" la malla 1 y en este caso el sentido asignado en el circuito sería correcto porque $\underline{U}_2 = jX_{M32}\underline{I}_3$ tiene polaridad positiva en el punto homólogo 2.

Según la polaridad y consecuente sentido de $\underline{I}_2$, será el efecto inducido que esta corriente produce en la malla 1 o en la malla 2 para cada caso.

**Caso 3**

Si todos los acoplamientos funcionan (todos los coeficientes de acoplamiento son distintos de cero), en el ejemplo de la Figura 5-9, y se supone que las tensiones inducidas en la malla 2 por las corrientes $\underline{I}_1$ e $\underline{I}_3$ determinan una resultante con polaridad positiva en el punto homólogo 2, entonces el sentido de $\underline{I}_2$ es el indicado. Así resultan las siguientes Ec. 5-26.

Malla 1: $\underline{U}_{f1} = \underline{I}_1\left(\underline{Z}_1 + jX_{L1}\right) + \underline{I}_2 j\underline{X}_{M12} - \underline{I}_3 j\underline{X}_{M31}$

Malla 2: $0 = \underline{I}_1 jX_{M12} + \underline{I}_2\left(\underline{Z}_2 + jX_{L_2}\right) - \underline{I}_3 jX_{M23}$ Ec. 5-26

Malla 3: $0 = \underline{I}_1 jX_{M12} + \underline{I}_2\left(\underline{Z}_2 + jX_{L_2}\right) - \underline{I}_3 jX_{M23}$

El efecto de tensión inducida por $\underline{I}_2$ (con el sentido asignado) en la malla 1 es con polaridad negativa en el punto homólogo 1 y en la malla 3 es con polaridad positiva en el punto homólogo 3.

Si las suposiciones hechas son contrarias a la realidad la resolución de las Ec. 5-26 tendrán resultado negativo, agregando los 180º correspondientes a los supuestos.

## 5.8 Resolución de circuitos con acoplamiento inductivo y conductivo

Puede haber casos en que el acoplamiento magnético o inductivo surja en circuitos en los cuales los arrollamientos causales del mismo también estén conectados conductivamente. El circuito de la Figura 5-10 es un ejemplo.

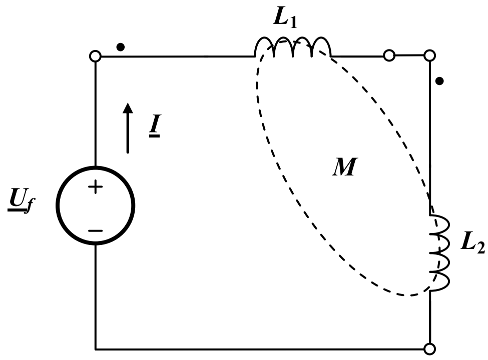



**Figura 5-10:** Circuito con acoplamiento inductivo y conductivo

En la Figura 5-11, el efecto inductivo representado por $M$ en el circuito de la Figura 5-10 se representa con las correspondientes fuentes de tensión dependientes. Dado que el sentido de la corriente es entrante al punto homólogo de cada una de las bobinas, la polaridad positiva de dichas fuentes estará apuntando al punto homólogo de la otra.

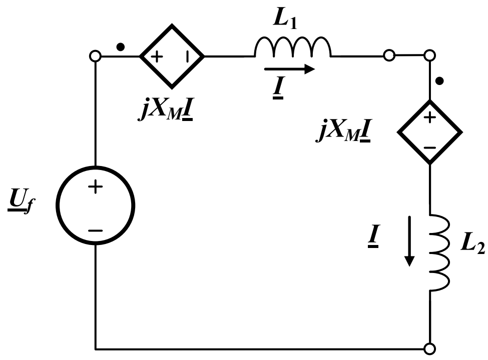



**Figura 5-11:** Circuito de la Figura 5-10 con fuentes dependientes

En definitiva, la ecuación de malla del circuito resulta:

$$\underline{U}_f = j\left(X_{L1}+X_{L2}\right)\underline{I} + jX_M\underline{I} + jX_M\underline{I} = j\left(X_{L1}+X_{L2}\right)\underline{I} + 2jX_M\underline{I} \qquad \text{Ec. 5-27}$$

Es evidente que un cambio de posición de uno de los puntos homólogos, o sea la inversión de una de las bobinas, modifica la Ec. 5-27 en:

$$\underline{U}_f = j\left(X_{L1}+X_{L2}\right)\underline{I} - 2\cdot jX_M\underline{I} \qquad \text{Ec. 5-28}$$

Llamando $\underline{Z}_1$ y $\underline{Z}_2$ las impedancias de entrada que ofrece el circuito en sus dos variantes, la diferencia de estos dos valores dividida por $j\omega$ tiene el resultado de la Ec. 5-29.

$$\underline{Z}_1 = j\left(X_{L1}+X_{L2}\right) + 2\cdot jX_M$$
$$\underline{Z}_2 = j\left(X_{L1}+X_{L2}\right) - 2\cdot jX_M \qquad \text{Ec. 5-29}$$
$$\frac{\underline{Z}_1 - \underline{Z}_2}{j\omega} = 4M$$

La conclusión interesante de este análisis es que se ha obtenido un método para la determinación del valor de $M$. Por otra parte, en la disposición de las bobinas en que se consigue la menor impedancia de entrada se puede marcar los puntos homólogos en los extremos en que se unen las inductancias (o los extremos opuestos).

## 5.9 Circuito inductivo con flujos separados

Las ecuaciones magnéticas Ec. 5-1 y 5-2 suelen redefinirse centrando la referencia en el flujo magnético *mutuo* $\phi_M$ que concatena a los dos bobinados es decir el que es consecuencia de la *magnetización* del núcleo. Dado que $\phi_{11}$ y $\phi_{22}$ no cumplen esa característica pasan a llamarse flujos *dispersos* y en definitiva la redefinición resulta:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \phi_{M1} + \phi_{d1} \\ \phi_2 &= \phi_{M2} + \phi_{d2} \end{aligned} \qquad \text{Ec. 5-30}$$

Teniendo en cuenta las Ec. 5-4, como enfoque más general de los coeficientes de acoplamiento y, definiendo $\sigma_1$ y $\sigma_2$ como coeficientes de dispersión, resulta:

$$\begin{aligned} \phi_{M1} &= k_1\phi_1 \qquad \phi_{d1} = \sigma_1\phi \\ \phi_{M2} &= k_2\phi_2 \qquad \phi_{d2} = \sigma_2\phi \end{aligned} \qquad \text{Ec. 5-31}$$

Y obviamente

$$k_1 + \sigma_1 = 1 \qquad \text{y} \qquad k_2 + \sigma_2 = 1$$

También resulta obvio que cuanto mejor el acoplamiento magnético, más cercano a cero será el coeficiente de dispersión.

Con este enfoque, las fórmulas para determinar $L_1$ y $L_2$ pueden reescribirse:

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{N_1\phi_1}{i_1} = \frac{N_1\phi_{M1}}{i_1} + \frac{N_1\phi_{d1}}{i_1} \\ L_2 &= \frac{N_2\phi_2}{i_2} = \frac{N_2\phi_{M2}}{i_2} + \frac{N_2\phi_{d2}}{i_2} \end{aligned} \qquad \text{Ec. 5-32}$$

El resultado de las Ec. 5-32 muestra que cada coeficiente de autoinducción es la suma de dos inductancias, una que involucra solo a $\phi_M$ y otra que solo tiene en cuenta a $\phi_d$. En otras palabras:

$$\begin{aligned} L_1 &= L_{m1} + L_{d1} \\ L_2 &= L_{m2} + L_{d2} \end{aligned} \qquad \text{Ec. 5-33}$$

Es importante destacar que cualquiera de las inductancias con igual subíndice numérico corresponde a bobinado con el mismo $N$.

$L_{m1}$ y $L_{m2}$ asociadas al flujo mutuo o sea la magnetización se denominan, por esta última característica inductancias de magnetización, se indican con $m$ en vez de $M$ para evitar confusión con la inductancia mutua que en algunos textos suele indicarse con $L_M$

Teniendo en cuenta las Ec. 5-33, el circuito de la Figura 5-2 puede modelarse como el siguiente:

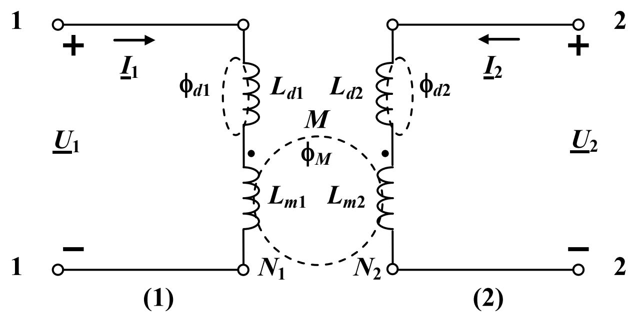



**Figura 5-12:** Modelo de la Figura 5-2 con dispersión

En el circuito de la Figura 5-12 se aprecia que $\phi_M$ sólo tiene efecto asociado a $L_{m1}$ y $L_{m2}$ y con acoplamiento magnético perfecto, por lo que si se considera $k_1 = k_2 = k$, resulta rápido verificar que $M = k\sqrt{L_1.L_2} = \sqrt{L_{m1}.L_{m2}}$ .

Si bien los puntos homólogos tienen que ver con la misma forma de arrollamiento de los bobinados, a los efectos de los aspectos de inducción mutua dichos puntos pueden asociarse con las inductancias de magnetización como se muestra en la Figura 5-12. Por otra parte, las fuentes de tensión controlada, indicativas de dicha acción mutua, se intercalan entre cada una de las $L_m$ y el correspondiente punto homólogo.

También debe quedar claro que en las inductancias de dispersión sólo se establecen tensiones de conducción en las correspondientes reactancias. Otro detalle significativo es que, de no existir corriente en alguna de las mallas, la correspondiente inductancia de dispersión será nula.

## 5.10 Circuito equivalente conductivo

Teniendo en cuenta la conclusión circuital del punto 5.9, si sólo se activa el lado (1) y se conecta una $\underline{Z}_2$ en el lado (2) resulta el circuito mostrado a continuación:

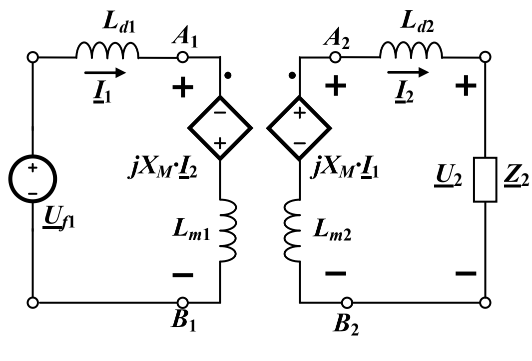



**Figura 5-13:** Circuito acoplado con el lado (1) activo y cerrado con $\underline{Z}_2$

Las ecuaciones que resuelven el circuito de la Figura 5-13 visto desde $A_1B_1$ resultan las siguientes:

$$\underline{U}_{A_1B_1} = \underline{I}_1 \cdot jX_{Lm1} - \underline{I}_2 \cdot jX_M \quad \text{Ec. 5-34}$$

$$\underline{I}_1 \cdot jX_M = \underline{I}_2 \cdot \left[ j\left( X_{Lm2} + X_{Ld2} \right) + \underline{Z}_2 \right] \quad \text{Ec. 5-35}$$

Despejando de la Ec. 5-35 se obtiene:

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{I}_1 \cdot jX_M}{j\left(X_{Lm2} + X_{d2}\right) + \underline{Z}_2}$$

y remplazando en la Ec. 5-34 resulta:

$$\underline{U}_{A_1B_1} = \underline{I}_1 \cdot \left[ jX_{Lm1} - \frac{jX_M \cdot jX_M}{j\left(X_{Lm2} + X_{Ld2}\right) + \underline{Z}_2} \right]$$

De la expresión anterior puede calcularse la admitancia desde $A_1B_1$

$$\underline{Y}_{A_1B_1} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_{A_1B_1}} = \frac{j\left(X_{Lm2} + X_{Ld2}\right) + \underline{Z}_2}{jX_{Lm1} \cdot \left[ j\left(X_{Lm2} + X_{Ld2}\right) + \underline{Z}_2 \right] - jX_M \cdot jX_M}$$

$$\underline{Y}_{A_1B_1} = \frac{j\left(X_{Lm2} + X_{Ld2}\right) + \underline{Z}_2}{jX_{Lm1} \cdot jX_{Lm2} + jX_{Lm1} \cdot jX_{Ld2} + jX_{Lm1} \cdot \underline{Z}_2 - jX_{Lm1} \cdot jX_{Lm2}}$$

Cancelando los términos que se restan y teniendo en cuenta que:

$$\frac{X_{Lm1}}{X_{Lm2}} = \frac{k \cdot X_{L1}}{k \cdot X_{L2}} = \frac{X_{L1}}{X_{L2}} = a^2$$

resulta:

$$\underline{Y}_{A_1B_1} = \frac{\left(jX_{Ld2} + \underline{Z}_2\right) + jX_{Lm2}}{jX_{Lm1} \cdot \left(jX_{d2} + \underline{Z}_2\right)} = \frac{1}{jX_{Lm1}} + \frac{1}{a^2\left(jX_{Ld2} + \underline{Z}_2\right)}$$

La expresión anterior corresponde al circuito siguiente "visto" desde $A_1B_1$,

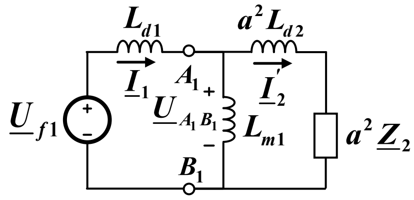



**Figura 5-14:** Circuito conductivo

El circuito de la Figura 5-14 es equivalente al de la Figura 5-13 y se aprecia que en el mismo aparecen los nodos $A_1$ y $B_1$ por ser ahora de carácter conductivo. Esta equivalencia también muestra que los componentes $L_{d2}$ y $\underline{Z}_2$ se "ven" desde el lado (1) multiplicados por $a^2$.

El cálculo de la corriente por estos nuevos elementos y teniendo en cuenta que $\frac{\underline{U}_{A_1B_1}}{\underline{U}_{A_2B_2}} = a$, resulta:

$$\underline{I'}_2 = \frac{\underline{U}_{A_1B_1}}{a^2\left(j \cdot X_{Ld2} + \underline{Z}_2\right)} = \frac{\underline{U}_{A_2B_2}}{a\left(j \cdot X_{Ld2} + \underline{Z}_2\right)} = \frac{\underline{I}_2}{a} \qquad \text{Ec. 5-36}$$

A partir de la Ec. 5-36 se comprueba en el nodo $A_1$ que $\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{A_1B_1}}{j \cdot X_{Ld1}} + \frac{\underline{I}_2}{a} = \underline{I}_{10} + \frac{\underline{I}_2}{a}$, resultado ya explicado en la Ec. 5-23.

También es fácil verificar que las tensiones en la malla (2) del circuito de la Figura 5-13, aparecen en los elementos correspondientes en el circuito de la Figura 5-14 multiplicadas por $a$.

Es habitual el siguiente cambio de nomenclatura para tensiones, corrientes e impedancias en el circuito conductivo resultante. En la Ec. 5-36 ya se ve ese cambio al nombrar la corriente como $\underline{I}'_2 = \frac{\underline{I}_2}{a}$, indicando el "prima" que se refiere a $\underline{I}_2$ vista desde el lado (1). De igual forma y con el mismo significado resultan $L'_{d2} = a^2 \cdot L_{d2}$ y $\underline{Z}'_2 = a^2 \cdot \underline{Z}_2$ . Por último $\underline{U}'_{\underline{Z}_2} = a \cdot \underline{U}_{\underline{Z}_2}$ .

Si se excita el circuito acoplado por el lado (2) vale el mismo procedimiento con resultados semejantes cambiando "prima" por "segunda" y $a$ por $1/a$ como factor.

En resumen:

- Desde el lado 1 las impedancias del lado 2 se multiplican por $a^2$
- Desde el lado 1 las tensiones del lado 2 se multiplican por $a$
- Desde el lado 1 las corrientes del lado 2 se dividen por $a$
- Desde el lado 2 las impedancias del lado 1 se dividen por $a^2$
- Desde el lado 2 las impedancias del lado 1 se dividen por $a$
- Desde el lado 2 las impedancias del lado 1 se multiplican por $a$

En conclusión, esta sección muestra que con las conversiones anteriores es posible analizar un circuito acoplado magnéticamente como un circuito eléctrico conductivo. En estas condiciones valen todos los métodos del Capítulo 3 y en especial son de aplicación las dos Leyes de Kirchhoff.

Este enfoque facilita el estudio de los sistemas eléctricos de transmisión y distribución en los cuales participa el circuito acoplado magnéticamente por excelencia: el transformador.

# CAPÍTULO 6
# Régimen transitorio

Ya se ha visto en el capítulo 4 cómo se obtiene la *respuesta* de circuitos con cualquiera de los elementos pasivos ($R$, $L$, $C$) cuando se los *excita* con señales alternas sinusoidales. También se comprueba que la resolución del circuito, posible con simplicidad y eficiencia de cálculo mediante fasores, resulta básicamente función de $\omega = 2\pi f$. Por este motivo se expresó que el *análisis* del circuito se desarrolla en el *dominio de la frecuencia*.

Además, cuándo un circuito se encuentra en estado de equilibrio energético, o lo mismo funcionando desde hace mucho tiempo, se dice que éste se encuentra operando en el *régimen permanente*.

Los métodos de resolución de circuitos vistos anteriormente, tanto para circuitos de corriente continua como alterna, sólo se pueden aplicar a circuitos que se encuentran operando en esta condición y los resultados no dependen del tiempo (si la señal de excitación es variable en el tiempo la señal respuesta también lo será pero dicha forma de variación será siempre la misma).

Sin embargo en ciertas circunstancias los circuitos pasan de un estado permanente a otro diferente al anterior. En esa *transición*, es conveniente analizar tensiones y/o corrientes en cualquiera de los componentes del circuito, tanto pasivo como activo, completamente en función del tiempo definiendo el tema estudio de este Capítulo.

## 6.1 Introducción

¿En qué circunstancias un circuito operando en un determinado *régimen permanente* pasa otro diferente?

Algunas de dichas circunstancias corresponden a los casos en que en el circuito se dan perturbaciones o cambios como los siguientes:

- Conexión o desconexión de fuentes, tanto de tensión como de corriente y tanto de continua como variables en el tiempo.
- Variación de los parámetros característicos de cualquiera de dichas fuentes.
- Conexión o desconexión de componentes pasivos.
- Variación de los parámetros característicos de dichos componentes pasivos.

Cualquiera de los cambios anteriores podría generar a su vez cambios en el tiempo, en particular de la corriente en inductores o de la tensión en capacitores, haciendo que el valor medio de la energía en dichos componentes también cambie. Importa aclarar que esta energía también puede ser de valor constante en el tiempo y coincidente con su valor medio.

Esta variación de la energía no puede ser instantánea ya que tendría como consecuencia el hecho físicamente imposible de que su variación en el tiempo (la potencia) sea infinita. Por lo tanto obliga a que la corriente en inductores, o la tensión en capacitores tengan variaciones temporales que aseguran que tal hecho no suceda.

En definitiva resulta necesario y también interesante *analizar* o resolver el circuito en el *dominio del tiempo* para cubrir estos casos presentados y comprobar al mismo tiempo las últimas premisas apuntadas.

Por otra parte, dado que se *transita* de una situación energética en elementos reactivos de un *régimen permanente* a otro, se dice que el sistema se estudia en *régimen transitorio.*

Analizar entonces un circuito general con elementos pasivos (como mínimo uno de ellos reactivo) y fuentes (tanto de tensión como de corriente y expresadas función del tiempo) en *régimen transitorio* consistirá en la resolución de un sistema de una o más ecuaciones diferenciales. Estas ecuaciones diferenciales resultan de aplicar las leyes de Kirchhoff al circuito teniendo en cuenta para cada elemento pasivo su correspondiente ecuación constitutiva.

Para cursos iniciales de análisis de circuitos eléctricos importa estudiar los conceptos principales, tanto matemáticos como especialmente físicos, del *régimen transitorio* presentado, para lo cual alcanza plantear el tema para el caso de una sola fuente *excitando* un circuito constituido por los tres elementos pasivos. Comprendidos estos conceptos principales, válidos también para casos más complejos de circuitos, existen otros medios de resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales cuya aplicación se estudia habitualmente en cursos siguientes.

Entonces para el caso de estudio, desde el punto de vista matemático, es de esperar una ecuación diferencial a lo sumo de 2º orden y de coeficientes contantes. Es conveniente plantear la ecuación diferencial de forma tal que, de un lado de la igualdad, quede la excitación y del otro lado sólo términos que dependan de la respuesta.

Para esta situación, el método clásico indica que la *solución general* surge de *sumar a la solución de la ecuación homogénea y una solución particular*. También establece que las *constantes de integración* se determinan en base a las *condiciones iniciales*, las que *deben introducirse en la solución general* obtenida.

Se presenta a continuación un punto de vista físico de solución del cual se hará un análisis de equivalencia con el enfoque matemático descripto.

En la Figura 6-1 se muestra un circuito con los componentes pasivos $R$, $L$ y $C$ conectados en serie y excitados, a partir de $t=0$, por una fuente de tensión función del tiempo, sin importar cuál sea el tipo de funcionalidad temporal.

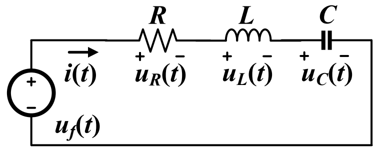



**Figura 6-1:** Circuito de análisis generalizado a partir de $t = 0$

En el circuito descripto, como consecuencia de la aplicación de la tensión, habrá una corriente $i(t)$. Esta corriente, ecuaciones constitutivas de por medio como ya se anticipara, determina las tensiones en cada componente pasivo que con la suma de la 2ª ley de Kirchhoff se iguala a la tensión $u_f(t)$ conformando la ecuación siguiente

$$u_f(t) = R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(t) \cdot dt \qquad \text{Ec. 6-1}$$

Esta ecuación es válida tanto a partir de cuándo se activa el circuito, como cuando después de transcurrido suficiente tiempo para que se establezca la condición *permanente* con la energía media constante en los elementos reactivos.

En particular en el inicio, la ecuación será la base para determinar la corriente durante el tiempo de comportamiento *transitorio*. O sea, habrá que resolver la Ec. 6-2, donde el subíndice $T$ (inicial de *transitorio*) para la corriente, refiere a la misma en el transcurso de dicho tiempo.

$$u_f(t) = R \cdot i_T(t) + L \cdot \frac{di_T(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_T(t) \cdot dt \qquad \text{Ec. 6-2}$$

Para el tiempo del *régimen permanente*, la solución se obtiene de la Ec. 6-3, donde el subíndice $F$ (para el que se usa la mayúscula para no confundir con la minúscula que se usa para identificar a las fuentes activas) corresponde a *forzado*, ya que sólo la fuente fuerza la misma característica temporal de la corriente.

$$u_f(t) = R \cdot i_F(t) + L \cdot \frac{di_F(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_F(t) \cdot dt \qquad \text{Ec. 6-3}$$

Si se resta la Ec. 6-3 de la Ec. 6-2 resulta la Ec. 6-4

$$0 = R \cdot \left[i_T(t) - i_F(t)\right] + L \cdot \frac{d\left[i_T(t) - i_F(t)\right]}{dt} + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} \left[i_T(t) - i_F(t)\right] \cdot dt \qquad \text{Ec. 6-4}$$

La Ec. 6-4 tiene como solución la diferencia entre corchetes ante una causa nula, es decir que la solución sólo depende del circuito mismo, incluidos los posibles estados energéticos establecidos en los elementos reactivos.

Este aspecto analizado puede verse como del circuito *libre* o de una respuesta propia del circuito, o *natural*. Las dos formas de calificar las características apuntadas permiten a su vez denominar el resultado de la diferencia de las corrientes en cuestión. Dado que se ha utilizado la mayúscula de la inicial como subíndice, para no confundir con una corriente inductiva, se prefiere la segunda denominación. Entonces la solución de 6-4 suele llamarse *corriente natural* $i_N(t)$.

Obtenida esta solución y dado que $i_N(t) = i_T(t) - i_F(t)$ resulta $i_T(t) = i_N(t) + i_F(t)$, basta con calcular $i_F(t)$ por métodos propios del régimen permanente para completar la determinación de $i_T(t)$

Si se compara el aspecto matemático de este análisis físico con el estrictamente clásico matemático se comprueba que la respuesta natural representa la solución de la homogénea y la general la forzada siendo la suma en ambos casos la total.

En la suma propuesta para calcular $i_T(t)$, como se verá, el aporte de $i_N(t)$ involucra constantes de integración, cuyo valor se obtiene a partir de los valores que tuvieran la corriente en el inductor y/o la tensión en el capacitor en $t = 0$ de modo tal que $i_T(0)$ no determine saltos instantáneos de la energía en cualquiera de los elementos reactivos.

Este último detalle es equivalente a las siguientes premisas duales:

- En un inductor no pueden existir cambios abruptos de corriente, dado que se daría el absurdo $u_L(t) = L\dfrac{di(t)}{dt} = \infty$.

y

- En un capacitor no pueden existir cambios abruptos de tensión, porque entonces el absurdo sería $i_C(t) = C\dfrac{du(t)}{dt} = \infty$.

Antes de aplicar lo explicado, vale un detalle más sobre aspectos de nomenclatura: la solución en régimen *permanente* también se puede identificar con el subíndice $P$, la consecuencia de la ecuación diferencial con excitación nula suele llamársela *libre*s, con el subíndice $L$ (con el riesgo de confusión con resultados inductivos) y finalmente la $T$ de *transitorio* es también inicial de *total* como sinónimo de la suma que se realiza.

A continuación se presenta el estudio de diferentes ejemplos en este aspecto de régimen transitorio en los cuales se ratificarán conceptos y premisas ya presentados y se comentarán los resultados relevantes que surjan, además de responder la pregunta *¿cuál es la duración del régimen transitorio?*

## 6.2 Circuito *RL*

El primer caso se ilustra en las Figuras 6-2 y 6-3. Se aprecia que se ha simplificado con un solo elemento reactivo y la consecuencia transitoria es causada por el cierre de la llave $k$, que determina que una fuente de tensión real, conformada por $u_f(t)$ y $R$, active un inductor $L$. La excitación se lleva a cabo con una señal función del tiempo con intención de generalizar este aspecto.

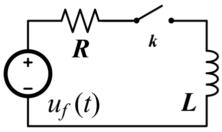



**Figura 6-2**

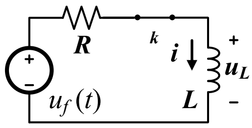



**Figura 6-3**

Para este primer caso, dado que la llave está inicialmente abierta (Figura 6-2), no puede haber corriente, por lo que el estado permanente previo al cierre de la llave ( $t=0-$ ) implica energía nula en el inductor. Cerrada la llave, ya se vio que la corriente que pretende imponer la fuente de tensión no puede cambiar instantáneamente por lo cual en $t=0+$ debe mantenerse nula, fijando la condición inicial para su posterior requerimiento en el cálculo de $i_T(t)=i_N(t)+i_F(t)$.

La fórmula anterior, como ya se explicara, se completa determinando la componente natural y la componente forzada, determinaciones que son independientes entre sí.

Siguiendo lo ya explicado, la componente natural es la corriente que se obtiene haciendo nula la causa en la ecuación diferencial resultante de aplicar la segunda Ley de Kirchhoff al circuito serie consecuencia del cierre de la llave en la Figura 6-3 y cuyo resultado muestra la Ec. 6-5.

$$0=R\cdot i_N(t)+L\cdot\frac{di_N(t)}{dt} \qquad \text{Ec. 6-5}$$

El método habitual de resolución por separación de variables da como resultado $-\frac{dt}{L/R}=\frac{di_N(t)}{i_N(t)}$. El primer denominador (cociente entre la característica de la parte reactiva dividido la característica de la parte no reactiva) tiene dimensión correspondiente al tiempo que no resulta difícil comprobar[9]; se denomina constante de tiempo y se identifica con $\tau$. Así la integración de ambos miembros da la Ec. 6-6 da finalmente la expresión de la Ec. 6-7.

$$-\frac{t}{\tau}=ln\left(i_N(t)\right)\text{-}ln(K)=ln\left(\frac{i_N(t)}{K}\right) \qquad \text{Ec. 6-6}$$

$$i_N(t)=K\cdot e^{-t/\tau} \qquad \text{Ec. 6-7}$$

Esta última expresión, considerando en general $K\neq 0$, indica que la corriente decrece asintóticamente a cero o lo que es lo mismo que decir que esta componente natural rigurosamente se anula en tiempo infinito y es la que a su vez decide la duración infinita del transitorio.

[9] Recordar que $\omega L/R$ es adimensional.

Sin embargo, refiriendo el tiempo transcurrido a la constante de tiempo, la Tabla 6-1 muestra algunos resultados que luego se analizan.

**Tabla 6-1:** Porcentual de $e^{-t/\tau}$ respecto de su valor inicial para diversas relaciones de $t/\tau$

| $t/\tau$ | 1 | 3 | 5 | 7 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| $e^{-t/\tau}\,[\%]$ | 36,8 | 4,9 | 0,7 | 0,009 | 0,004 |

Transcurrido un tiempo igual a $\tau$ la exponencial vale el $36{,}8\%$ de su valor inicial, información que resultará de interés en todo este tema. A medida que el tiempo aumenta el porcentaje disminuye y para $t=5\tau$ resulta menor que $1\%$ que a los fines prácticos es un error aceptable. Es decir que este intervalo de tiempo es un equivalente finito para considerar finalizado el transitorio con el error aceptable mencionado. Es obvio que los siguiente tiempos, $t=7\tau$ y $t=10\tau$ son aproximaciones con errores significativamente menores para la consideración práctica de final del transitorio.

El planteo previo a la Tabla 6-1 y el análisis posterior dan dos respuestas a la pregunta final de la sección 6-1: rigurosamente los transitorios duran tiempo infinito, pero a los fines prácticos es común adoptar valores finitos de $10\tau \geq t \geq 5\tau$.

Ahora la corriente transitoria resulta la de la Ec. 6-8.

$$i_T(t)=K\cdot e^{-t/\tau}+i_F(t) \qquad \text{Ec. 6-8}$$

Esta expresión muestra más claramente, que transcurrido $t=5\tau$ y dado que $i_N(t)$ puede despreciarse frente a $i_F(t)$, esa corriente transitoria (también presentada en los detalles sobre nomenclatura de los subíndices como sinónimo de total) termina resultando la forzada por la excitación (en este caso una tensión) y define el nuevo estado permanente.

Por último para completar la Ec. 6-8 es necesario calcular $i_F(t)$ y luego determinar el valor de $K$, que como ya se indicó, se obtiene a partir de las condiciones iniciales de $i_T(t)$.

Dado que por ahora se está usando $u_f(t)$ como señal generalizada, $i_F(t)$ debe considerase también genérica y en consecuencia del mismo modo resulta $K$. En efecto, haciendo $t=0+$ en la Ec. 6-8 resulta $K=i_T(0+)-i_F(0+)$, que reemplazada en la misma Ec. 6-8 determina la Ec. 6-9 siguiente.

$$i_T(t)=\left(i_T(0+)-i_F(0+)\right)\cdot e^{-t/\tau}+i_F(t) \qquad \text{Ec. 6-9}$$

Como se verá con enfoque dual, el formato matemático de la anterior expresión se mantiene para el caso de que el elemento reactivo sea capacitivo, estando en la expresión de $\tau$ la explicitación del elemento reactivo en cuestión.

Volviendo al caso de las Figuras 6-2 y 6-3, completamente analizado en forma genérica, sigue el ejemplo para la excitación una tensión continua $u_f(t)=U_f$ y condición inicial para la corriente en el inductor nula (o sea energía nula). Al valor inicial de esta corriente se lo designa genéricamente $I_{L0}$, que para la condición propuesta determina que $I_{L0}=0$.

Con estos datos del ejemplo resulta $i_T(0+) = i_T(0-) = I_{L0} = 0$ e $i_F(t) = U_f/R$, y a partir de la anterior expresión $i_F(0+) = U_f/R$. Haciendo los reemplazos en la Ec. 6-9 se obtiene la solución del ejemplo como muestra la Ec. 6-10, recordando que $\tau = L/R$.

$$i_T(t) = -\frac{U_f}{R} \cdot e^{-t/\tau} + \frac{U_f}{R} = \frac{U_f}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \qquad \text{Ec. 6-10}$$

Si el ejemplo cambia, porque por medio externo y previo al cierre de la llave las condiciones iniciales no son nulas, o sea $I_{L0} \neq 0$, también cambia $i_T(0+) = i_T(0-) = I_{L0}$; con lo que, realizando este reemplazo en la Ec. 6-9, ahora resulta la Ec. 6-11.

$$i_T(t) = \left(I_{L0} - \frac{U_f}{R}\right) \cdot e^{-t/\tau} + \frac{U_f}{R} = I_{L0} \cdot e^{-t/\tau} + \frac{U_f}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \qquad \text{Ec. 6-11}$$

Es interesante resaltar en la formulación de la Ec. 6-11, que la corriente que inicialmente existía en el inductor se extingue con el mismo formato exponencial que la corriente natural o libre del propio circuito

Considerando, a modo de ejemplo, $U_f = 5\ \mathrm{V}$, $R = 4\ \Omega$, $L = 10\ \mathrm{H}$ e $I_{L0} = 0{,}5\ \mathrm{A}$ y por lo tanto $\tau = L/R = 2{,}5\ \mathrm{s}$, $I_F = U_f/R = 1{,}25\ \mathrm{A}$; las Figuras 6-4 y 6-5 muestran las gráficas de $i_N(t)$, $i_F(t)$ e $i_T(t)$ para los dos casos estudiados.

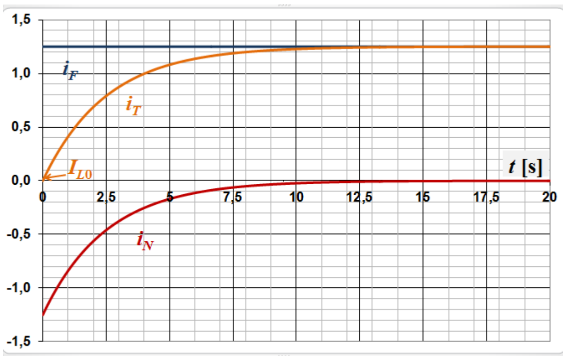



**Figura 6-4:** $i_N(t)$, $i_F(t)$ e $i_T(t)$ para $I_{L0} = 0\ \mathrm{A}$

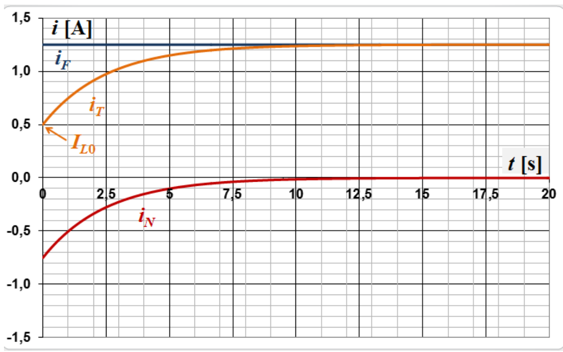



**Figura 6-5:** $i_N(t)$, $i_F(t)$ e $i_T(t)$ para $I_{L0} = 0{,}5\ \mathrm{A}$

Si ahora se calcula la derivada en las expresiones de las Ec. 6-10 y 6-11 resulta respectivamente $\frac{U_f}{R \cdot \tau} e^{-t/\tau}$ y $-\frac{I_{L0}}{\tau} e^{-t/\tau} + \frac{U_f}{R \cdot \tau} e^{-t/\tau}$ que para $t = 0$ dan $\frac{U_f}{R \cdot \tau}$ y $-\frac{I_{L0}}{\tau} + \frac{U_f}{R \cdot \tau}$ o, por lo visto en el párrafo anterior a la Ec. 6-10, $\frac{I_F}{\tau}$ e $\frac{I_F - I_{L0}}{\tau}$.

En las Figuras 6-6 y 6-7 (que corresponden a las 6-4 y 6-5, pero donde sólo se han graficado $i_T(t)$ e $i_F(t)$) están dibujadas las rectas tangentes en el origen cuya pendiente son las anteriores expresiones analíticas para cada caso. La simple atención gráfica permite comprobar que dichas rectas cortan a la asíntota horizontal del valor final justamente para $t = \tau$.

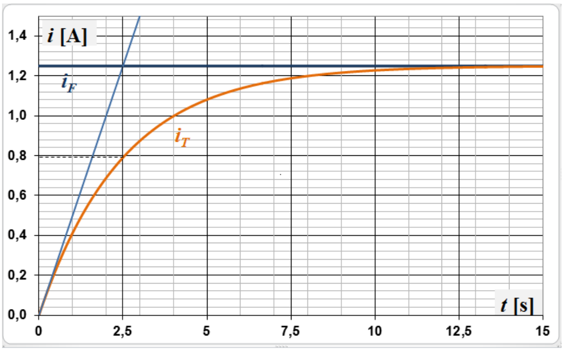



Figura 6-6

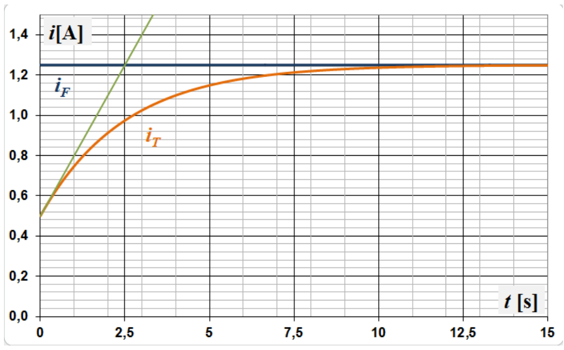



Figura 6-7

Para ese valor particular del tiempo resulta $e^{-t/\tau}=e^{-1}=0,37$ y en consecuencia puede también comprobarse, para el caso de la Figura 6-6, que $i_T(\tau)/i_F(t=\infty)$ es igual a $1-e^{-1}=0,63$ o en otras palabras que para $t=\tau$ el transitorio está a $37\,\%$ de su valor final.

Como se verá en los próximos ejemplos, las conclusiones resultantes de lo estudiado hasta ahora son de aplicación general consecuencia del concepto de dualidad tantas veces presentado.

## 6.3 Circuito *GC*

En este caso, mostrado en las Figuras 6-8 y 6-9 nuevamente la respueta transitoria es causada con el cambio de posición de la llave $k$ que hace que una fuente de corriente real conformada por $i_f(t)$ y $G$, active un capacitor $C$. También en este caso la excitación se hace con una señal genérica función del tiempo.

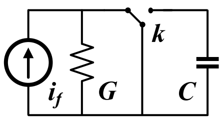



Figura 6-8

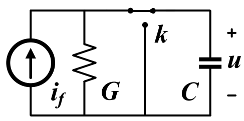



Figura 6-9

Si se presta atención, el circuito propuesto es dual del primer caso presentado en el sección 6.2. En consecuencia, en las ecuaciones presentadas en dicha sección, cambiando la corriente serie en $L$ por la tensión paralelo en $C$, además de $L$ por $C$, $R$ por $G$, los valores iniciales de corriente por los valores iniciales de tensión y las fórmulas de cálculo del valor final de la corriente por el del valor final de tensión; resultan las ecuaciones de este segundo caso.

Seguir estos cambios de formulación también significa repasar al mismo tiempo la aplicación del procedimiento para determinar en este caso $u_T(t)=u_N(t)+u_F(t)$ y se alienta al lector a realizar esa comprobación.

De esa comprobación se destacan en la Tabla 6-2 algunos detalles obvios, considerando las respectivas fuentes de excitación constantes en el tiempo, o sea en continua.

**Tabla 6-2**

| | Elemento reactivo | Elemento no reactivo | Constante de tiempo | Componente natural | Valor final |
|---|---|---|---|---|---|
| Circuito Figuras 6-2 y 6-3 | $L$ | $R$ | $\tau = L/R$ | $i_N(t) = K \cdot e^{-t/\tau}$ | $i_F(t) = U_f / R$ |
| Circuito Figuras 6-8 y 6-9 | $C$ | $G$ | $\tau = C/G$ | $u_N(t) = K \cdot e^{-t/\tau}$ | $u_F(t) = I_f / R$ |

Respecto al valor inicial que aporta a la determinación de $K$ en la componente natural, en este caso corresponde a la tensión en el capacitor que, como ya se dijo, no puede variar en forma instantánea. Cabe recordar que dicha tensión (que podría ser nula) está relacionada con el estado inicial energético que durante el transitorio se modifica para el nuevo estado energético definido por el valor final para la tensión y forzado por la fuente.

También es bueno insistir que, en rigor, dicha transición se desarrolla en tiempo infinito; aunque para $t = 5\tau$ prácticamente puede considerarse resuelto (si se pretende ser más puntilloso queda las otras opciones vistas en la Tabla 6-1). Y también la recomendación de comprobar que inexorablemente también $\tau = C/G$ tiene dimensión de tiempo.

Las gráficas de las Figuras 6-4 a 6-7, insistiendo en el cambio de corriente por tensión, son las que representan la respuesta en el tiempo de este circuito capacitivo.

Y por último, conocida la corriente en el inductor, $i_L(t)$, y/o la tensión en el capacitor, $u_C(t)$, puede completarse el análisis de los restantes parámetros del circuito con la formulación mostrada en la Tabla 6-3.

**Tabla 6-3**

| | | | |
|---|---|---|---|
| Circuito Figuras 6-2 y 6-3 | $i_L(t)$ | $u_L(t) = L\dfrac{di_L(t)}{dt}$ | $u_R(t) = R \cdot i_L(t)$ |
| Circuito Figuras 6-8 y 6-9 | $u_C(t)$ | $i_C(t) = C\dfrac{du_C(t)}{dt}$ | $i_G(t) = G \cdot u_C(t)$ |

Por ejemplo, la aplicación de las fórmulas de la sección 6-2 al circuito capacitivo considerando $i_f(t) = I_f$ y un valor inicial en el capacitor $U_{C0} \neq 0$, dan los siguientes resultados.

Empezando por la versión dual de la Ec. 6-11 resulta la tensión en el capacitor como muestra la Ec. 6-12.

$$u_C(t) = U_{C0} \cdot e^{-t/\tau} + \frac{I_f}{G}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \qquad \text{Ec. 6-12}$$

Ahora, la derivada de la Ec. 6-12 multiplicada por $C$ determina la Ec. 6-13.

$$i_C(t) = -\frac{U_{C0} \cdot C}{\tau} \cdot e^{-t/\tau} + \frac{I_f \cdot C}{\tau \cdot G} e^{-t/\tau} = \left(I_f - U_{C0} \cdot G\right) e^{-t/\tau} \qquad \text{Ec. 6-13}$$

Y la Ec. 6-12 por $G$ da la corriente en el elemento no reactivo según la Ec. 6-14.

$$i_G(t) = U_{C0} \cdot G \cdot e^{-t/\tau} + I_f\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \qquad \text{Ec. 6-14}$$

Por último se puede verificar con la primera Ley de Kirchhoff, la igualdad de la Ec. 6-15.

$$i_C(t) + i_G(t) = \left(I_f - U_{C0} \cdot G\right) e^{-t/\tau} + U_{C0} \cdot G \cdot e^{-t/\tau} + I_f\left(1 - e^{-t/\tau}\right) = I_f \qquad \text{Ec. 6-15}$$

Considerando $i_f = 5\,\text{A}$, $G = 4\,\text{S}$, $C = 10\,\text{F}$ e $U_{C0} = 0{,}5\,\text{V}$ y por lo tanto $\tau = C/G = 2{,}5\,\text{s}$, y $U_F = I_f/G = 1{,}25\,\text{V}$; la Figura 6-10 muestra la gráfica de $u_C(t)$, y la Figura 6-11 las de $i_C(t)$ e $i_G(t)$ pudiéndose ver además cómo se satisface la Ec.6-15.

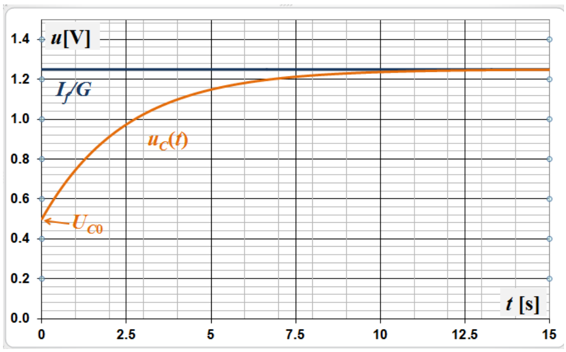



**Figura 6-10:** Gráfica de la Ec. 6-12

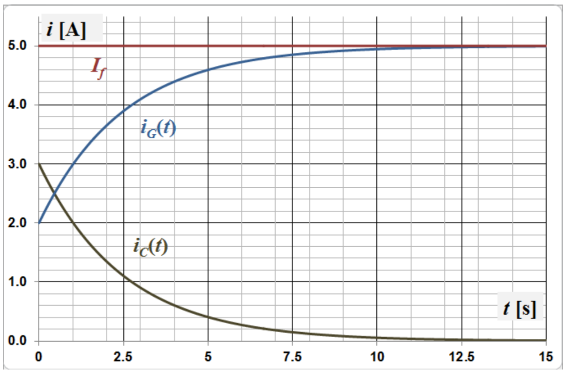



**Figura 6-11:** Gráficas de las Ec. 6-13, 6-14, 6-15

## 6.4 Otras variantes circuitales y alguna conclusión

Existen otras configuraciones circuitales con perturbaciones que generan respuesta transitoria para las cuales algunos de los resultados analizados en las secciones 6.2 y 6.3 siguen siendo válidos.

En efecto, por ejemplo la transformación de fuentes reales de los circuitos, con las llaves ya conmutadas, de las Figuras 6-3 y 6-9 dan los circuitos de las Figuras 6-12 y 6-13.

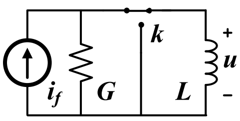



**Figura 6-12**

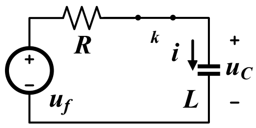



**Figura. 6-13**

Las transformaciones de las fuentes solo generan circuitos equivalentes en los que se debe cumplir:

- En la Figura 6-12 la corriente, y consecuentemente la tensión en $L$, son respectivamente las mismas que en el mismo componente en la Figura 6-3,
- En la Figura 6-13 la tensión, y consecuentemente la corriente en $C$, son respectivamente las mismas que en el mismo componente en el de la Figura 6-9.

Con este detalle ya conocido resulta luego fácil determinar la corriente en $G$ y la tensión en $R$ y así completar el análisis de los dos nuevos circuitos.

Con los recursos de dualidad y transformación de fuentes se ha podido analizar las cuatro posibles situaciones de transitorios causados por aplicación, tanto de fuentes reales de tensión como de corriente a cualquiera de los dos elementos reactivos.

Haber realizado el enfoque anterior es otra opción de análisis y por otra parte también una forma de verificar el resultado siguiendo el método de suma de componente natural y forzada para determinar la corriente en inductores o la tensión en los capacitores.

Por otra parte, repasando los motivos que generan el régimen transitorio en un circuito, con al menos un elemento reactivo, surgen algunas conclusiones interesantes.

- En efecto, ya se vio que en los componentes reactivos el cambio energético debido a alguna perturbación no puede realizarse en forma instantánea. O lo mismo, el pasaje de un régimen permanente a otro régimen permanente diferente al anterior requiere un tiempo[10].
- Lo anterior es también equivalente al no cambio instantáneo de la corriente en un inductor o al no cambio instantáneo de la tensión en un capacitor.
- La componente natural resulta necesaria para asegurar esa transición decreciendo con $e^{-t/\tau}$ a partir de la diferencia entre sus valores final e inicial. La forma de decrecimiento exponencial depende de la constante de tiempo, la que es directamente proporcional al valor de la característica reactiva (inductancia o capacitancia) e inversamente proporcional al aspecto no reactivo definido por la resistencia o la conductancia equivalente que "ve" el elemento reactivo con las fuentes nulas. O sea, cuanto mayor sea el valor de los elementos reactivos más lento será el transitorio práctico y a la inversa con los no reactivos ya que se favorece el cambio en el reactivo.
- La componente natural debe realizarse sobre la corriente en circuitos inductivos y sobre la tensión en circuitos capacitivos. Si la constante de integración $K$ es nula dicha componente natural no existe o sea no hay transitorio, el régimen es permanente y forzado por la excitación.

## 6.5 Circuito $RL$ y $GC$ excitado con alterna

Los ejemplos desarrollados en las secciones anteriores, si bien utilizan expresiones de carácter general en las cuales las fuentes son consideradas variables en el tiempo, fueron aplicados con fuentes constantes en el tiempo, o de continua.

Se desarrolla a continuación el ejemplo de transitorio en el caso del circuito de la Figura 6-2 pero ahora con $u_f(t) = U_{máx} \cdot sen(\omega t + \psi)$ siendo la perturbación el cierre de la llave en $t = 0$. La fase inicial $\psi$ se elige distinta de cero para dar generalidad al ejemplo. En efecto, para el momento del cierre de la llave la tensión aplicada podrá ser de diferentes valores $\left(u_f(0) = U_{máx} \cdot sen(\psi)\right)$ y cómo se verá más adelante también es el caso de $i_F(0+)$.

El procedimiento es el mismo que se realizó en la sección 6.2, o sea determinar $i_N(t)$ e $i_F(t)$. La componente natural es obviamente la misma que la de la Ec. 6-7, mientras que la forzada es consecuencia de calcular la corriente en el circuito excitado con la señal de alterna. Este cálculo puede realizarse mediante fasores pero como debe expresarse en función del tiempo la expresión final implica módulos de los complejos y la conversión a función armónica.

---

[10] Nuevamente se recuerda que dicho tiempo es matemáticamente infinito, aunque en la práctica pueda considerarse acotado con un número entero de constantes de tiempo.

O sea $i_F(t) = \left(U_{máx} / \sqrt{R^2 + X_L{}^2}\right) \cdot sen(\omega t + \psi - \phi)$, con $tg(\phi) = X_L/R = \omega\tau$, y esta expresión en la Ec. 6-9 en definitiva da la Ec. 6-16

$$i_T(t) = \left(i_T(0+) - i_F(0+)\right) \cdot e^{-t/\tau} + \left(U_{máx} / \sqrt{R^2 + X_L{}^2}\right) \cdot sen(\omega t + \psi - \phi) \qquad \text{Ec. 6-16}$$

Considerando $i_T(0+) = I_{L0} = 0$ y siendo $i_F(0+) = \left(U_{máx} / \sqrt{R^2 + X_L{}^2}\right) \cdot sen(\psi - \phi)$, con estos datos la Ec. 6-16 se transforma en la siguiente Ec. 6-17.

$$i_T(t) = -\left(U_{máx} / \sqrt{R^2 + X_L{}^2}\right) \cdot sen(\psi - \phi) \cdot e^{-t/\tau} + \left(U_{máx} / \sqrt{R^2 + X_L{}^2}\right) \cdot sen(\omega t + \psi - \phi) \qquad \text{Ec. 6-17}$$

Si bien $\tau = L/R$ es independiente de la excitación como representa un tiempo puede compararse con el periodo $T = 1/f$ de la señal alterna del ejemplo en estudio.

Considerando a modo de ejemplo una fuente de tensión alterna de $U_{máx} = 1\,\text{V}$, $T = 0{,}02\,\text{s}$ $(f = 50\,\text{Hz})$ ó $\omega = 2\pi/T = 314{,}16\,\text{rad/s}$ y $R = 1\,\Omega$, excitando un inductor con $I_{L0} = 0\,\text{A}$. A continuación se muestran gráficas de $i_N(t)$, $i_F(t)$ e $i_T(t)$ para dos valores diferentes de $L$ y $\psi$. En la Tabla 6-4 se consignan dos grupos con cada uno de dichos valores además de los cálculos de los otros parámetros relevantes para las gráficas de las Figuras 6-14, 6-15, 6-16 y 6-17.

**Tabla 6-4**

| | $L\,[\text{H}]$ | $\psi\,[°]$ | $\tau = L/R\,[\text{s}]$ | $\tau/T$ | $Z\,[\Omega]$ | $\phi\,[°]$ | $i_F(0+)\,[\text{A}]$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Grupo 1 | 0,01 | 90 | 0,01 | 0,5 | 3,297 | 72,34 | 0,092 |
| Grupo 2 | 0,05 | 0 | 0,05 | 2.5 | 15,74 | 86,36 | -0,0634 |

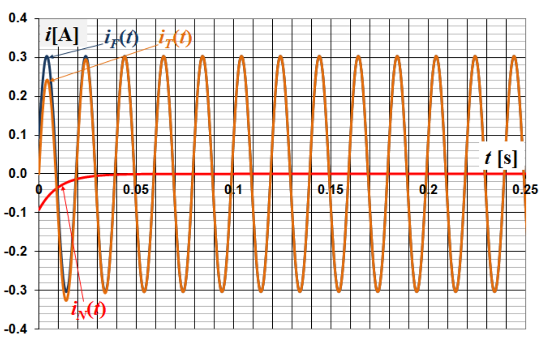



**Figura 6-14:** $i_N(t)$, $i_F(t)$ e $i_T(t)$, grupo 1, Tabla 6-4

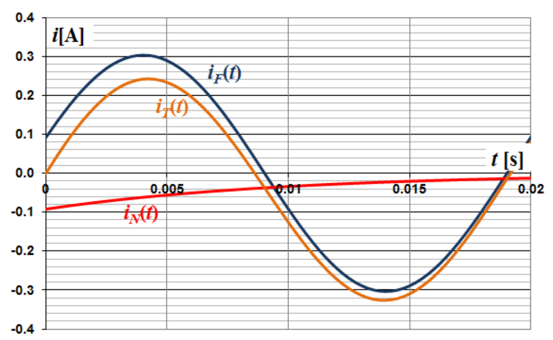



**Figura 6-15:** Detalle de la Figura 6-14 en el origen

En la Figura 6-15 se aprecia que la curva azul correspondiente a la corriente forzada por la excitación tiene, en $t = 0$, el valor distinto de cero mostrado en la Tabla 6-4, obligando a que la corriente natural arranque en ese instante con un valor igual y de signo opuesto para asegurar la condición inicial dada de $I_{L0} = 0\,\text{A}$. Dado que corriente forzada inicial es de valor positivo, la corriente natural hace "*bajar*" al principio el resultado de la corriente total.

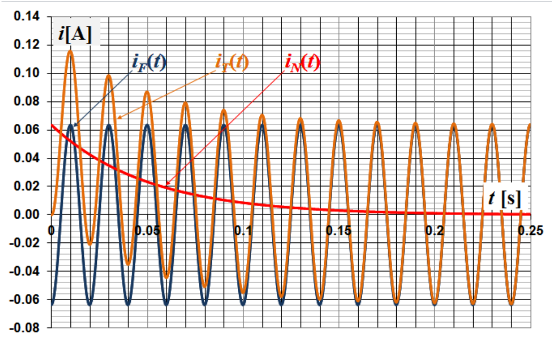



**Figura 6-16** $i_N(t)$, $i_F(t)$ e $i_T(t)$, grupo 2, Tabla 6-4

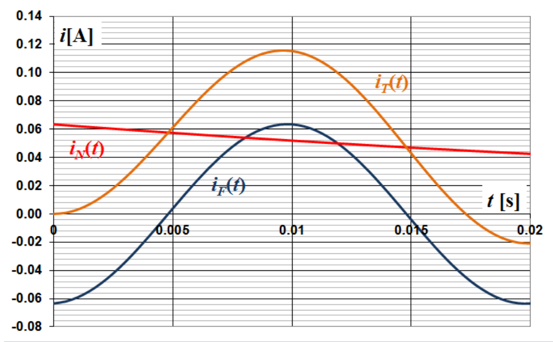



**Figura 6-17 :** Detalle de la Figura 6-16 en el origen

Para la Figura 6-17 vale el mismo comentario hecho para la Figura 6-15, pero debe apreciarse que el par de valores de $L$ y $\psi$ elegidos determina un valor de corriente forzada inicial negativo y en consecuencia la corriente natural ahora hace "*subir*" el resultado de la corriente total.

En definitiva, con menor o mayor incidencia, durante el transitorio la corriente resulta asimétrica con crestas con valores absolutos mayores que los máximos del estado permanente (como se aprecia en las sinusoides anaranjadas superpuestas a las azules en los gráficos de las Figuras 6-14 y 6-16). En el caso de la Figura 6-17 la primera cresta es aproximadamente 80% mayor.

Otra observación interesante para estos dos ejemplos presentados es que para la primera constante de tiempo en $2{,}5 \cdot T$ se llega al régimen permanente y no son tan notables las diferencias de los valores iniciales de las crestas. En cambio para la segunda constante de tiempo recién en $12{,}5 \cdot T$ se consigue la condición permanente y con más crestas mayores.

Y por último, para la misma excitación, el caso $\psi = \phi$ que determina que $i_F(0+) = (U_{máx}/Z) \cdot sen(\psi - \phi) = 0$, es decir coincidente con el valor inicial nulo en el inductor y por lo tanto no hay transitorio y es nula la componente natural. Las Figuras 6-18 y 6-19 son obvia muestra de este caso

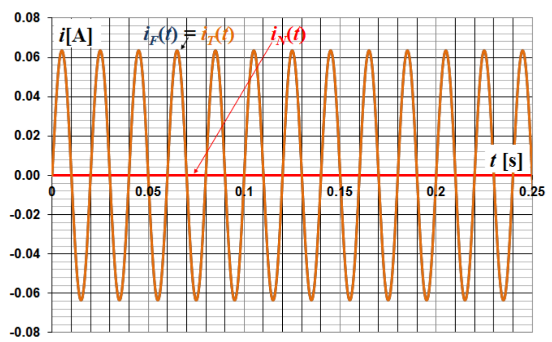



**Fig. 6-18**

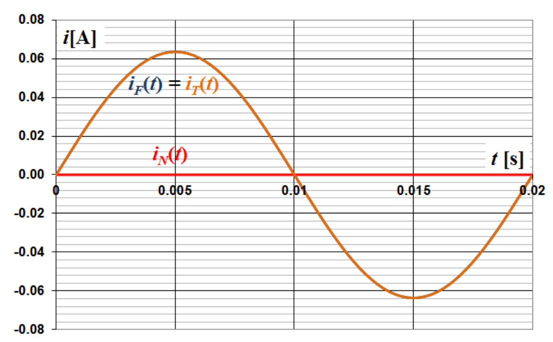



**Fig. 6-19**

Por dualidad, todo lo analizado para el circuito serie vale para el paralelo $GC$ y las transformaciones de fuente permiten conocer el comportamiento de las otras versiones serie o paralelo como se vio en la sección 6.4.

## 6.6 Circuito *RLC*

En esta última sección se presenta el estudio del circuito presentado al principio, en la Figura 6-1, que incluye los dos elementos reactivos teniendo en cuenta las posibles condiciones iniciales tanto en el inductor como en el capacitor.

El procedimiento de análisis propuesto requiere conocer las ya reiteradas componentes natural y forzada. Esta última se resuelve con métodos en régimen permanente ya conocidos, sea en continua o en alterna. En cambio es necesario atender el cálculo de la componente natural ya que, se verá, da tres posibles respuestas.

Retomando la Ec. 6-4, ecuación integro diferencial de la componente natural para el circuito en cuestión, que se repite en la Ec. 6-18.

$$0 = R \cdot i_N(t) + L \cdot \frac{di_N(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_N(t) \cdot dt \qquad \text{Ec. 6-18}$$

Derivando la anterior, resulta la clásica ecuación diferencial de segundo orden igualada a cero de la Ec. 6-19

$$L \cdot \frac{d^2 i_N(t)}{dt^2} + R \cdot \frac{di_N(t)}{dt} + \frac{i_N(t)}{C} = 0 \qquad \text{Ec. 6-19}$$

Considerando la solución $i_N(t) = K \cdot e^{st}$, reemplazada en la Ec. 6-19 resulta:

$$Ls^2 K e^{st} + RsKe^{st} + \frac{Ke^{st}}{C} = Ls^2 + Rs + \frac{1}{C} = s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0 \qquad \text{Ec. 6-20}$$

Y finalmente, las raíces solución de la ecuación de segundo grado, consecuencia de la simplificación en la Ec. 6-20, resultan $s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$ y $s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$ siendo $\alpha = \frac{1}{2 \cdot \tau_L}$ [11] y $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$. Si además se llama $\beta = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$ la solución finalmente es:

$$i_N(t) = K_1 \cdot e^{s_1 t} + K_2 \cdot e^{s_2 t} = K_1 \cdot e^{(-\alpha+\beta)t} + K_2 \cdot e^{(-\alpha-\beta)t} \qquad \text{Ec. 6-21}$$

Analizando la Ec. 6-21 y sus parámetros componentes surge lo siguiente:

- La componente natural ahora está constituida por dos funciones exponenciales.
- Las raíces $s_1$ y $s_2$ pueden ser:
  - reales y distintas si $\alpha > \omega_0$ y $\therefore$ $\beta$ real
  - complejas conjugadas si $\alpha < \omega_0$ y $\therefore$ $\beta$ imaginario $(j\beta)$
  - reales y coincidentes sí $\alpha = \omega_0$ y $\therefore$ $\beta = 0$
- La obtención de los valores de $K_1$ y $K_2$ sólo depende de los valores iniciales en los dos elementos reactivos, como ya se explicó, pero vinculando el valor inicial en el inductor (corriente) con $i_T(0)$ y el valor inicial en el capacitor (tensión) y con $L\frac{di_T(0)}{dt}$ y $Ri_T(0)$.

[11] sigue siendo $\tau_L = L/R$

- Obtenidas las constantes y teniendo en cuenta las posibilidades apuntadas para $s_1$ y $s_2$, $i_N(0)$ resulta:
  - una señal denominada *amortiguada* para $\alpha > \omega_0$,
  - una señal denominada *oscilatoria amortiguada* para $\alpha < \omega_0$
  - una señal transición entre las anteriores denominada *critica* para $\alpha = \omega_0$

A modo de ejemplo de lo analizado se considera el caso particular de excitación y corriente inicial nulas y una tensión inicial en el capacitor, siendo ésta la causante de que exista $i_N(t)$. O sea en el circuito de la Figura 6-20: $u_f(t)=0$ y por lo tanto $i_F(0)=0$, $I_{L0}=0$ y $U_{C0} \neq 0$, con lo que resultan $K_1 = \frac{1}{s_1 - s_2}\frac{U_{C0}}{L}$ y $K_2 = \frac{-1}{s_1 - s_2}\frac{U_{C0}}{L}$ [12].

La Tabla 6-5 muestra los valores de $K_1$ y $K_2$ para los casos amortiguados y oscilatorios amortiguados y las consecuentes formulas de la componente natural.

**Tabla 6-5**

| Amortiguado | | | | Oscilatorio | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha > \omega_0$ | | | | $\alpha < \omega_0$ | | | |
| $s_1$ | $s_2$ | $s_1 - s_2$ | $K_1 = -K_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_1 - s_2$ | $K_1 = -K_2$ |
| $-\alpha + \beta$ | $-\alpha - \beta$ | $2\beta$ | $\frac{U_{C0}}{2\beta L}$ | $-\alpha + j\beta$ | $-\alpha - j\beta$ | $j2\beta$ | $\frac{U_{C0}}{j2\beta L}$ |
| $i_N(t) = \frac{U_{C0}}{L} e^{-\alpha t}\left(\frac{e^{\beta t} - e^{-\beta t}}{2\beta}\right) = \frac{U_{C0}}{\beta L} e^{-\alpha t} senh(\beta t)$ | | | | $i_N(t) = \frac{U_{C0}}{L} e^{-\alpha t}\left(\frac{ej^{\beta t} - e^{-j\beta t}}{j2\beta}\right) = \frac{U_{C0}}{\beta L} e^{-\alpha t} sen(\beta t)$ | | | |

La condición crítica determina que $\beta = 0$, lo que implica que $\beta t$ será “pequeño" para cualquier $t$. Con esta consideración, tanto $senh(\beta t)$ como $sen(\beta t)$, pueden aproximarse a $\beta t$ y las dos ecuaciones de la última fila de la Tabla 6-5 resultan coincidentes e igual a $i_N(t) = \frac{U_{C0}}{L} te^{-\alpha t}$ para esta última condición analizada.

Analizando las tres ecuaciones resultantes y los parámetros en ellas involucrados resultan algunos detalles interesantes:

- Los dos elementos reactivos a través de $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$ muestran la posibilidad de una oscilación armónica de la respuesta natural, razón por la cual la frecuencia de dicha pulsación se denomina también *natural*
- El elemento no reactivo $R$, involucrado en $\alpha$ y a través de $\alpha$ en $\beta$, tiene las siguientes implicancias según sea su valor:
  - Si $R = 0$ (caso solamente teórico), la respuesta sería una oscilación constante con pulsación $\omega_0$.

[12] Se deja al lector el cálculo de $K_1$ y $K_2$.

- A medida que $R$ aumenta de valor, $\alpha$ decrece, y el factor exponencial dependiente del mismo, determina un amortiguamiento cada vez más acentuado, haciendo que las oscilaciones de la respuesta se extingan más rápidamente y la pulsación de la misma, $\beta$, también sea progresivamente menor.
- Para un valor particular de $R$ en este aumento, $\beta$ resulta nulo dando la *respuesta crítica* a partir de la cual ya no se consigue la posibilidad de oscilación.

Para ejemplificar, con $L = 1\,\mathrm{H}$, $C = 1\,\mathrm{F}$, $I_{L0} = 0$, $U_{C0} = 1{,}25\,\mathrm{V}$ y para cinco valores de $R$ crecientes, en la tabla 6-6 se consignan los resultados de todos los parámetros involucrados en las tres ecuaciones de la componente natural de la corriente para su posterior ilustración de sus representaciones.

**Tabla 6-6**

| $R\,[\Omega]$ | $\omega_0\,[\mathrm{rad/s}]$ | $\alpha\,[1/\mathrm{s}]$ | $\beta\,[1/\mathrm{s}]$ |
|---|---|---|---|
| 0,05 | 1 | 0,025 | 1 |
| 1 | 1 | 0,5 | 0,866 |
| 2 | 1 | 1 | 0 |
| 5 | 1 | 2,5 | 2,291 |
| 10 | 1 | 5 | 4,899 |

La Figura 6-20 muestra las correspondientes representaciones y la Figura 6-21 un detalle de la anterior para los $5\,\mathrm{s}$ iniciales

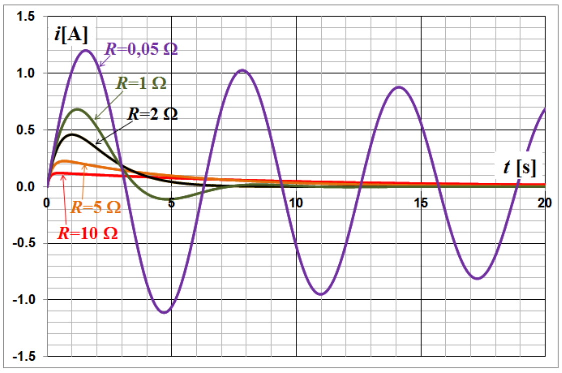



**Figura 6-20**

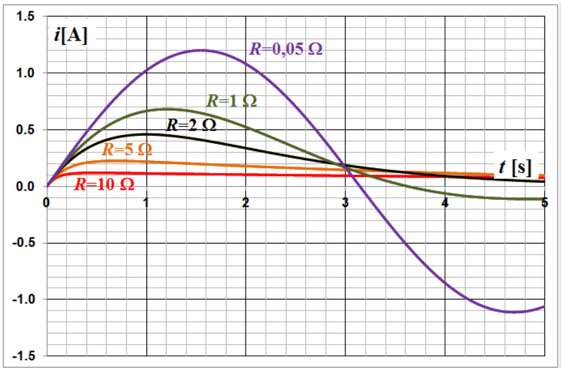



**Figura 6-21**

Se propone al lector hacer un resumen con las conclusiones relevantes que surjan del análisis de las anteriores curvas.

# APÉNDICE A
# Nomenclatura y simbología

Con el discurrir del tiempo y luego de consultar innumerable cantidad de bibliografía se ha podido comprobar la falta de coherencia respecto de la nomenclatura y simbología (NyS) utilizadas en las unidades de los parámetros eléctricos y en la representación de circuitos eléctricos. Fundamentalmente, el tema se hace crítico cuando el estudiante debe adecuarse a una NyS con la cual se desarrollan los temas de Física, luego la NyS cambia cuando debe estudiar Teoría de Circuitos, hasta que en la última parte de la carrera ocurre algo similar con las asignaturas de años superiores, tanto de la especialidad Eléctrica como Electrónica. Durante este trayecto, el estudiante debe acomodarse a estos inútiles cambios que provocan distracción o pérdida de la concentración del estudio específico, debido al esfuerzo adicional que implica acostumbrarse a manejar una nueva NyS, o a una mezcla de una nueva y una ya conocida.

Esta situación se ve lamentablemente favorecida o fomentada, por una parte, debido a la inmensa variedad de bibliografía existente, cuyos autores han adoptado una u otra NyS; y por otra parte, como consecuencia de los mismos docentes, que a su vez, han preferido utilizar, sin establecer un criterio razonable, su propia NyS.

Asimismo, la vida profesional también pone de manifiesto estas situaciones, observándose que algunos utilizan una nomenclatura y/o simbología, y otros otra; resultando, al principio, tedioso "entenderse" hasta decidir finalmente qué NyS utilizar en los trabajos en conjunto.

Ésto último resulta más trascendente cuando se encuentran individuos de formación "electrónica" (formados por bibliografía anglosajona) y "eléctrica" (formados por bibliografía alemana, italiana, rusa o europea en general), debido a la necesaria interacción de ambas especialidades; dado que en este punto también se establecen algunas diferencias.

La evolución de los textos bibliográficos surgidos en los últimos años parece marcar una tendencia, aunque aún no del todo definida, respecto de esta cuestión; fundamentalmente en lo referente a la simbología, y no tan así para el caso de la nomenclatura.

El objetivo de este capítulo es proponer el ordenamiento y la unificación de la NyS, en base a normas internacionales vigentes y a la tendencia de la bibliografía actual.

## A.1 Nomenclatura

Según el diccionario de la lengua castellana, sinónimos de nomenclatura son *lista o catálogo*. La definición es: *conjunto de las voces técnicas y propias de una ciencia o de un arte*.

Hasta el momento, se ha venido observando el uso de ciertos vocablos; los cuales, pueden clasificarse de la siguiente manera:

**a)** Inherentes a nuestro idioma.

**b)** Adaptaciones que derivan de los nombres de las unidades de medida de las respectivas magnitudes.

**c)** Otros que, por ser de origen angloparlante o de otro idioma y no contar con un equivalente castellano, son adoptados sin cambios o con mínimos cambios por nuestra lengua.

Un caso típico entre todos estos es *tensión*. En [1] se hace referencia a una frase de André Marie Ampère: *"...llamaré a la primera tensión eléctrica y a la segunda corriente eléctrica..."*. Esto significa que, al menos para los latinos, esta etimología debería ser respetada.

Es costumbre que aún en la actualidad se utilice la palabra *voltaje* para referirse a la tensión. Se entiende que esta denominación surgió como consecuencia de la proliferación de bibliografía de origen angloparlante, sobre todo referida a temas de electrónica, cuyos traductores adoptaron o castellanizaron vocablos de origen anglosajón, cuando ya existía una palabra más que adecuada y no forzada para denominar la magnitud en cuestión.

Otro tanto ocurre con *amperaje* o *vataje*. Para el primer caso, además de la denominación acuñada por Ampère, nuestra lengua dispone acertadamente del tradicional vocablo *intensidad (de corriente)*; y para el segundo, *potencia (activa)*.

El cuestionamiento de estos aspectos surge de que, tanto voltaje, amperaje o vataje, provienen de *Volta*, *Ampère* o *Watt*; que, como ya sabemos son las unidades de las magnitudes en cuestión. Más aún, lo cuestionado de esta situación es la pretendida traducción de apellidos de personajes célebres de la ciencia. En el caso de *voltaje* el error ya viene de arrastre de otro idioma, pues es bien sabido que los angloparlantes utilizan la palabra *voltage*.

La inquietud planteada surge respecto de lo anteriormente expuesto, teniendo en cuenta la bibliografía actual, y en particular la que trata temas de electrónica; dado que en el caso de la bibliografía que desarrolla temas eléctricos, esto no ocurre tan asiduamente; sea porque tradicionalmente se cuenta con textos desarrollados por especialistas vernáculos, italianos, franceses, alemanes o incluso rusos, en los cuales se respetan las denominaciones tradicionales de los parámetros involucrados.

Un caso curioso respecto del tema de cómo se trata la nomenclatura según el idioma y al que vale la pena hacer mención es [2], que en la versión citada (en inglés) utiliza *voltage*, mientras que en la publicación [3], versión en castellano de [2], la palabra utilizada es *tensión*. El caso indicado resulta representativo, ya que el vocablo original alemán *spannung* significa tensión, tanto mecánica como eléctrica.

En este juicio de valor no existe animosidad respecto del progreso o la evolución lingüística, ni contra la practicidad de la utilización de ciertos vocablos, sino que en virtud de la

riqueza de la lengua castellana, resulta inútil castellanizar vocablos que ya tienen una correspondencia en nuestro idioma, además de efectuar traducciones de apellidos, lo cual podría resultar una irreverencia hacia los titulares de los mismos.

Un capítulo aparte merecen las denominaciones involucradas en el apartado **c)** de la clasificación dada. El avance tecnológico, en particular en el campo de la electrónica, ha hecho que surgieran dispositivos nuevos, sin antecedentes o versiones tecnológicas anteriores. Es lógico pensar que el inventor de cierto mecanismo o dispositivo tenga derecho también a inventarle un nombre o adecuar una palabra, grupo de palabras o juego de palabras para identificar determinado elemento. Ésto es lo que resulta evidente ocurrió en este caso. ¿Cómo se podría traducir *transistor* si nunca antes de ser inventado había existido nada similar?

Debe recordarse que transistor proviene de la conjunción de dos vocablos de origen inglés: *transfer resistor*.

Algo similar ocurre con *flip-flop*, a la cual algunos traductores le asignaron, con la mejor buena voluntad, el vocablo *biestable*; aunque para muchos sigue siendo sencillamente flip-flop.

Casos diferentes lo constituyen *diodo* y *unijuntura*. La palabra diodo proviene de *diode*, y para *unijunction* se encontró la traducción "perfecta": unijuntura.

Hasta aquí, el presente capítulo no pretende imponer condiciones en cuanto al uso de la lengua. Sólo se hace una revisión histórica, intentando justificar el por qué de algunas situaciones inquietantes para algunas personas, a quienes les preocupa la correcta expresión oral y escrita. La intención es proponer una forma coherente y académica de expresión, sin necesidad de recurrir innecesariamente a voces extranjeras.

Para finalizar, se efectúan algunas aclaraciones relativas a un tema al cual no se le presta la debida atención y que es a menudo objeto de uso incorrecto.

Generalmente cuando se hace referencia a los elementos pasivos de un circuito eléctrico, se menciona indiferentemente *capacitor* o *capacitancia*, *inductor* o *inductancia* y *resistor* o *resistencia*. Pero ¿es correcta esta “indiferencia”? La respuesta es: NO. El elemento físico, tangible, que se puede fabricar o comprar en el comercio debe tener una denominación que lo distinga de su cualidad o magnitud física. Esa “diferencia” necesaria es la indicada líneas más arriba. Los elementos físicos se denominan en forma correcta: *capacitor*, *inductor*, *resistor*. Las cualidades o magnitudes físicas: *capacitancia*, *inductancia*, *resistencia*. En general, estas aclaraciones no se hacen expresas en los textos o bibliografía; de aquí que se extienda la confusión y se generalice el trato “indiferente” ya mencionado.

## A.2 Simbología

Se entiende por *simbología*, desde el punto de vista eléctrico, todo lo referente a cómo debe representarse un circuito para una adecuada comprensión: cómo deben ser los dibujos que representan a determinado elemento, qué símbolos literales usar, tanto para la representación de las variables o parámetros del circuito, así como las unidades de las magnitudes de dichas variables y parámetros.

¿Cuál es la ventaja que ésto representa? Bien es sabido que si no se contara con la expresión gráfica de un circuito, resultaría muy complejo describir sólo con palabras la conformación del mismo y así analizar su comportamiento. Cuando un especialista mira el dibujo de un circuito, de un golpe de vista puede reconocerlo y hasta efectuar un somero análisis mental del funcionamiento.

Asimismo, si el dibujo no se presenta con la suficiente claridad, puede resultar hasta tedioso su estudio.

La manera de revertir esta situación es, además de procurar orden y prolijidad en el dibujo en sí mismo, utilizar la simbología adecuada y precisa para cada caso, evitando ambigüedades de representación, pero a la vez lograr la simplificación de la misma.

Las unidades de medida, aun cuando existen normas y bibliografía que claramente indican la simbología correspondiente, son objeto de distorsiones en distintos ámbitos.

La Tabla A-1 muestra las magnitudes utilizadas en electrotecnia, con sus nombres, símbolos y unidades. Esta tabla está basada en gran medida en [4], [5], [6], [7] y [8].

La simbología presente en la Tabla A-1, extractada fundamentalmente de [4], merece algunas aclaraciones. Los símbolos de los parámetros físicos son los tradicionalmente utilizados en la bibliografía; observándose que, en general, corresponden a letras mayúsculas de los alfabetos latino y griego y, además, se escriben en cursiva y negrita.

**Tabla A-1:** Símbolos y unidades de los parámetros físicos utilizados en electrotecnia

| PARÁMETRO FÍSICO | | UNIDAD | | PARÁMETRO FÍSICO | | UNIDAD | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Nombre** | **Símbolo** | **Nombre [6]** | **Símbolo [7]** | **Nombre** | **Símbolo** | **Nombre [6]** | **Símbolo [7]** |
| diferencia de potencial o tensión | $U$ | volt | V | permeabilidad | $\mu$ | henry/metro | H/m |
| | | | | resistividad | $\rho$ | ohm metro | $\Omega\cdot$m |
| fuente de tensión | $U_f$ | | | resistencia | $R$ | ohm | $\Omega$ |
| fuente de corriente | $I_f$ | ampere | A | impedancia | $Z$ | | |
| corriente | $I$ | | | reactancia | $X$ | | |
| carga eléctrica | $q$ | coulomb | C | conductancia | $G$ | siemens | S |
| campo eléctrico | $E$ | Volt/metro | V/m | admitancia | $Y$ | | |
| densidad de corriente | $J$ | ampere/metro$^2$ | A/m$^2$ | susceptancia | $B$ | | |
| capacitancia | $C$ | farad | F | conductividad | $\sigma$ | siemens/metro | S/m |
| permitividad | $\varepsilon$ | farad/metro | F/m | potencia (carga activa) | $P$ | watt | W |
| campo magnético | $H$ | ampere/metro | A/m | carga reactiva | | volt ampere reactivo | var |
| fuerza magnetomotriz | $Fm$ | Ampere vuelta | Av | carga aparente | | volt ampere | VA |
| inducción magnética | $B$ | tesla | T | energía, trabajo | $W$ | joule | J |
| flujo magnético | $\phi$ | weber | Wb | período | $T$ | segundo | s |
| autoinductancia | $L$ | henry | H | constante de tiempo | $\tau$ | | |
| inductancia mutua | $M$ | | | frecuencia | $f$ | hertz | Hz |
| factor de acoplamiento | $k$ | adimensional | | pulsación | $\omega$ | radián/segundo | rad/s |
| reluctancia | $\Re$ | 1/henry | H$^{-1}$ | | | | |

Los símbolos de las unidades merecen una atención especial, dado que se advierten frecuentes errores en su utilización. Dado que algunos provienen de iniciales nombres propios (*Ampère*, *Coulomb*) y otros de iniciales de nombres comunes (*segundo*, *radián*); debe observarse que los primeros se escriben con mayúscula y los segundos, con minúscula [6]. Si dos unidades poseen la misma inicial (*henry*, *hertz*), para diferenciarlas se agrega a una de ellas alguna otra letra del nombre en minúscula (H, Hz). Un caso particular es el *var* (*volt ampere*

*reactivo*) que, por ser la combinación de dos nombres propios más un adjetivo que indica una característica particular, se optó por crear una palabra (en minúscula) que designe a la unidad; no ocurrió lo mismo con $VA$ (*volt ampere*). Además los símbolos derivados de nombres propios no tienen plural y cuando se escribe la palabra completa, se lo hace con minúscula, de acuerdo a lo indicado por [5].

A modo de aporte adicional, en la Tabla A-2 se presenta la lista de prefijos correspondientes a los múltiplos y submúltiplos de las unidades físicas, extractado de [9] y verificado en [8].

En este punto es importante aclarar que el prefijo *k* no se escribe con mayúscula, sino con minúscula. La aclaración se hace manifiesta puesto que es un error muy común de encontrar, incluso en mucha bibliografía especializada.

**Tabla A-2:** Prefijos de múltiplos y submúltiplos de las unidades físicas

| Factor | Prefijo | | Ejemplo |
|---|---|---|---|
| | **Nombre** | **Símbolo** | |
| $10^{24}$ | yotta | Y | $1YJ=10^{24}J$ |
| $10^{21}$ | zetta | Z | $1Z\Omega=10^{21}\Omega$ |
| $10^{18}$ | exa | E | $1EW=10^{18}W$ |
| $10^{15}$ | peta | P | $1Pm=10^{15}m$ |
| $10^{12}$ | tera | T | $1THz=10^{12}Hz$ |
| $10^{9}$ | giga | G | $1GT=10^{9}T$ |
| $10^{6}$ | mega | M | $1MV=10^{6}V$ |
| $10^{3}$ | kilo | k | $1kA=10^{3}A$ |
| $10^{-3}$ | mili | m | $1mWb=10^{-3}Wb$ |
| $10^{-6}$ | micro | μ | $1\mu F=10^{-6}F$ |
| $10^{-9}$ | nano | n | $1nH=10^{-9}H$ |
| $10^{-12}$ | pico | p | $1pC=10^{-12}C$ |
| $10^{-15}$ | femto | f | $1fs=10^{-15}s$ |
| $10^{-18}$ | atto | a | $1aW=10^{-18}W$ |
| $10^{-21}$ | zepto | z | $1z\Omega=10^{-21}\Omega$ |
| $10^{-24}$ | yocto | y | $1yV=10^{-24}V$ |

## A.3 Representaciones gráficas

A pesar de lo expuesto, la nomenclatura usada aún actualmente, puede llevar a confusiones; o simplemente puede ocurrir que no exista un acuerdo para denominar tal o cual magnitud de forma unívoca.

De la misma forma, la representación gráfica de los elementos de un circuito resulta muy variada, según la bibliografía consultada, o inclusive según el "gusto" de cada interlocutor. Otro tanto ocurre con la identificación literal de tales elementos.

Generalmente, y por citar un ejemplo, es frecuente ver representadas las fuentes dependientes e independientes con el mismo símbolo. De lo expuesto en párrafos anteriores, se advierte la inconveniencia de esto. De hecho, la mayoría de la bibliografía actual tiene en cuenta esta situación tal como se puede apreciar simplemente hojeando [1], [10], [11], [12] y [13], y en lo expuesto en este capítulo se toma cuenta de ello.

Para una rápida comprensión, sean los siguientes ejemplos:

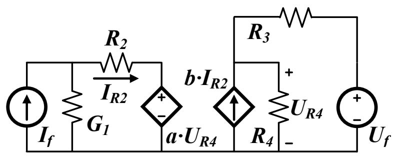



**Figura A-1:** Circuito en continua

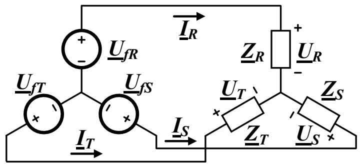



**Figura A-2:** Circuito en alterna senoidal

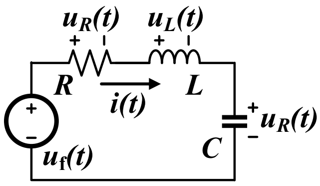



**Figura A-3:** Circuito con señales en función del tiempo arbitrarias

## A.3.1 Circuito en continua

Como se observa en la Figura A-1, hay una fuente de corriente independiente. Este tipo de fuente (independiente) se simboliza mediante un círculo; en este caso, dado que la fuente es de corriente, se coloca en su interior una flecha que indica el sentido asignado a la misma. Si la fuente independiente hubiese sido de tensión, en lugar de una flecha se habría colocado un juego de símbolos + y -, indicando qué polaridad tiene asignado cada borne según la ubicación de los mismos.

Como se ve, el circuito posee dos fuentes dependientes, una de tensión y otra de corriente. El símbolo en este caso es un rombo. Se debe observar que se mantiene la identificación indicada en el párrafo anterior respecto de si se trata de fuente de tensión o de corriente.

La intensidad y sentido de la circulación de cargas en un elemento, es decir la corriente, se indica con una flecha próxima a dicho elemento y no se ubica la flecha sobre los conductores. El sentido de la corriente así indicada se puede hacer coincidir con la de malla, lo cual facilita el análisis en algunos casos.

Asimismo, la tensión se simboliza mediante los signos + y -, según la polaridad de los potenciales que la causan y no mediante flechas, evitando la confusión con una corriente.

Los elementos del circuito se designan con letras mayúsculas, que a su vez representan sus características eléctricas, y subíndices necesarios para completar la identificación.

Las tensiones y corrientes en los elementos también se designan con mayúscula, utilizándose $U$ para las primeras e $I$ para las segundas, con los subíndices que correspondan.

De igual forma, los ejes de las curvas características del transistor, por ejemplo, también se deben identificar con mayúscula, dado que las mismas son "estáticas".

Las fuentes merecen una mención especial, dado que por su característica de fuentes de energía podría asignarse una identificación distintiva: $U_f$ para las de tensión e $I_f$ para las de corriente (con el subíndice $f$, por fuente).

## A.3.2 Circuito trifásico (señales de alterna de frecuencia única)

En este caso, Figura A-2, se trata de un circuito trifásico, donde existe una única frecuencia en las señales, dado que la pulsación de las tres fuentes es la misma y se considera que no hay elementos alinéales.

Básicamente se respetan las premisas indicadas en el apartado A.3.1 respecto de las fuentes, tensiones, corrientes y elementos pasivos, que en este caso pueden ser resistivos, reactivos o combinaciones de ambos.

La nueva y única característica adicional es que, dado que en este caso los parámetros pueden representarse como números complejos, los símbolos literales poseen una raya inferior que identifica tal condición matemática.

### A.3.3 Circuito con fuente de tensión generalizada (dominio del tiempo)

Este caso, Figura A-3, podría corresponder a un circuito en estado transitorio, o a un circuito con fuente de tensión poliarmónica, entre otros.

Las tensiones y las corrientes en estos casos se identifican con letras minúsculas y dependientes del tiempo, como ocurre con las funciones matemáticas.

Al igual que en los casos anteriores, los símbolos para la representación de fuentes, tensiones, corrientes, no cambian.

Como esta forma de representación de las variables es general, $u(t)$ e $i(t)$ también podrían representar tanto a una constante (independiente del tiempo) o una senoidal.

## A.4 Conclusiones

En este capítulo se ha presentado una propuesta de unificación de la nomenclatura y la simbología para la representación de circuitos eléctricos.

Una de las consecuencias favorables de la propuesta presentada se observa en los ejemplos mostrados a lo largo de artículo: de un golpe de vista se identifican los elementos del circuito, en forma inmediata se advierte si el circuito es de continua, alterna o si las señales son de tipo especial, se diferencian inmediatamente las corrientes y sus sentidos y las tensiones y sus polaridades.

Como se mencionó en la introducción, el objetivo de este trabajo es proponer un ordenamiento que, en vista de las tendencias actuales respecto de la normalización, debería ser tenido en cuenta.

## A.5 Bibliografía ampliatoria


[1] M. Deorsola y P. Morcelle del Valle, "Nomenclatura y simbología en la representación de circuitos eléctricos", Segundas Jornadas de Investigación y Transferencia, Facultad de Ingeniería, UNLP, 2013.

[2] D. Jhonson, J. Hilburn y J. Jhonson, "Análisis básico de circuitos eléctricos", Prentice Hall, 1991, p. 20.

[3] W. Müller-Schwarz, "Basic Electrical Theory and Practice", Siemens-Heyden& Son Ltd, 1981.

[4] Autores varios, "Colección Enseñanza programada", Siemens-Marcombo S.A., 1989.

[5] "Letter symbols including conventions and signs for electrical technology. A handbook for every day use", International Electrotechnical Commission, 1983.

[6] A.M. Yoder, "Hablar claro", Megavatios, Nº 239, marzo 2001.

[7] Nombre de unidades. SI brochure, Section 5.2http://www.bipm.org/en/si/si_brochure/chapter5/5-2.html

[8] Símbolos de unidades.SI brochure, Section 5.1http://www.bipm.org/en/si/si_brochure/chapter5/5-1.html

[9] Prefijos. SI brochure, Section 5.2 http://www.bipm.org/en/si/si_brochure/chapter3/prefixes.html

[10] R. Feynman, R. Leighton y M. Sands, "Física. Electromagnetismo y materia",vol. II. Addison-Wesley Iberoamericana, 1987, p. 6-18.

[11] D. Scott, "Introducción al análisis de circuitos Un enfoque sistémico",McGraw-Hill, 1988.

[12] J. Nilsson, "Circuitos eléctricos", Addison-Wesley Iberoamericana, 1995. Pearson, Prentice Hall 2005.

[13] C. Alexander, M. Sadiku, "Circuitos eléctricos",Mc Graw Hill, 2002

[14] R. Boylestad, "Introducción al análisis de circuitos",Pearson, Prentice Hall 2004.

# APÉNDICE B
# Modelo

Se puede describir a la ingeniería como *la actividad orientada a resolver problemas sometidos a restricciones*. Para ello deben combinarse el estudio de la matemática y las ciencias naturales y sociales.

El arte de la ingeniería consiste en tomar una idea y desarrollarla para producir bienes de utilidad para la sociedad.

Para ello es debido: analizar el problema, sintetizar la solución más adecuada, evaluar los resultados y eventualmente re sintetizar la solución.

En ingeniería se utilizan *modelos* para el desarrollo de las tareas mencionadas. Los modelos permiten manejar los parámetros y establecer límites en las características de operación de los dispositivos.

Desde el punto de vista de un circuito eléctrico, es posible definir *modelo* como un objeto, o un conjunto de objetos, o una ecuación que representa a un elemento o a un circuito.

En este apéndice se extiende la definición de *modelo*, ilustrando dicha definición con algunos ejemplos.

## B.1 Modelo

Parafraseando nuevamente el Diccionario de la Lengua Española, en sus acepciones 3ª y 4ª, define *modelo* como “representación en pequeño de alguna cosa” y “esquema teórico, generalmente en forma matemática, de un sistema o de una realidad compleja que se elabora para facilitar su comprensión y el estudio de su comportamiento”, respectivamente.

Tanto en ciencias puras como en ciencias aplicadas, se denomina *modelo* al resultado del proceso de generar una representación abstracta, conceptual, física, matemática, gráfica o visual; de fenómenos, sistemas o procesos a fin de analizar, describir, explicar, simular (en general para explorar, controlar y predecir) esos fenómenos o procesos. Se considera que la creación de un modelo es una parte esencial de toda actividad científica.

Para hacer un modelo es necesario plantear una serie de hipótesis, de manera que lo que se quiere representar esté suficientemente plasmado en la idealización; aunque también se busca, normalmente, que sea lo bastante sencillo como para poder ser manipulado y estudiado.

Así es que se tienen diferentes tipos de modelos

- **Modelo físico:** es una representación o copia (generalmente a escala, ya sea mayor o menor) de algún objeto de interés y que permite su examinación en diferente circunstancias (por ejemplo, una maqueta o un prototipo). La escala no es necesariamente la misma en todos los ejes; por ejemplo, en modelados topográficos a veces se utilizan diferentes escalas verticales y horizontales.
- **Modelo matemático:** se busca representar fenómenos o relaciones entre ellos a través de una fórmula matemática.
- **Modelo numérico:** permite “experimentar”, a través de simulaciones en una computadora, modelos matemáticos o lógicos.
- **Modelo analógico:** se basa en las analogías que se observan desde el punto de vista del comportamiento de sistemas físicos diferentes que, sin embargo, están regidos por formulaciones matemáticas idénticas. Por ejemplo, hasta los años 1970 el modelado de sistemas de aguas subterráneas se realizaba con redes eléctricas de resistencias y capacitores. Este procedimiento, bastante engorroso y costoso se sustituyó con el modelado puramente matemático en la medida en que aumentó la capacidad de las computadoras y se popularizó el uso del cálculo numérico.

A pesar que hay poca teoría generalizada acerca del empleo de modelos, la ciencia moderna ofrece una colección creciente de métodos, técnicas y teorías acerca de diversos tipos de modelos. En la práctica, diferentes ramas o disciplinas científicas tienen sus propias ideas y normas acerca de tipos específicos de modelos.

En el apartado siguiente, y a modo de ejemplo vulgar, se presenta el desarrollo del modelo de una linterna.

### B.1.1 Modelo de una linterna

Con el objeto de ilustrar el desarrollo de un modelo se ha elegido una linterna, dado que resulta un sistema práctico cuyos componentes son muy conocidos. Las Fotos B-1 y B-2 muestran una linterna común y sus distintos componentes, respectivamente.



**Foto B-1:** La linterna




**Foto B-2:** Componentes de la linterna por separado

Cuando se considera una linterna como un sistema eléctrico, los componentes principales son: (1) las pilas, (2) la lámpara, (3) el conector helicoidal, (4) el cuerpo y (5) el interruptor. Se puede determinar ahora un modelo de circuito para cada componente.

Una pila seca mantiene una tensión bastante constante si la corriente no es excesiva. Por lo tanto, si la pila seca opera dentro de los límites para los cuales fue diseñada, se puede modelar con una fuente de tensión ideal. Entonces, la tensión prefijada es constante e igual a la suma de los valores de las dos pilas secas.

El resultado final de la linterna es energía luminosa, la cual se obtiene calentando el filamento de la lámpara a una temperatura suficiente como para causar radiación en el espectro visible. Se puede modelar el filamento mediante una un resistor ideal. El valor de la resistencia de dicho resistor representativo de la lámpara tiene que ver con el requerimiento constante de corriente para las pilas, una característica interesante del sistema. En este modelo, $R_l$ simboliza la resistencia de ese resistor.

El conector que se usa en la linterna sirve para dos fines. Primero, proporciona un camino conductor eléctrico entre las pilas y el cuerpo de la linterna. Segundo, está formado por un resorte helicoidal de modo que pueda aplicar una presión mecánica a los contactos entre las pilas y la lámpara. El propósito de esta presión mecánica es minimizar la resistencia de contacto entre las dos pilas y entre las pilas y la lámpara. Por lo tanto, al escoger el alambre para el conector, se puede encontrar que las propiedades mecánicas del alambre determinan la elección del material y el tamaño. Eléctricamente, se puede modelar el conector con un resistor ideal. En este caso, ese resistor de resistencia $R_1$ modela el conector helicoidal.

Si el cuerpo de la linterna es metálico, el mismo tiene dos propósitos: uno eléctrico y uno mecánico. Desde el punto de vista mecánico, el cuerpo sirve para contener las pilas y de soporte al conjunto; desde el punto de vista eléctrico, conduce las cargas que determinan la corriente. Es decir, el cuerpo es un eslabón en el camino eléctrico entre las pilas y la lámpara. Como se trata de un conductor metálico, se puede modelar su comportamiento eléctrico me-

diante otro resistor ideal, que es posible representar con resistencia $R_c$. Si la linterna tiene un cuerpo de plástico, una tira metálica dentro del cuerpo conecta el conector con el interruptor. Esta tira es necesaria porque el cuerpo de plástico no es un conductor eléctrico. Una resistencia ideal también sirve para modelar a la tira de metal.

El último componente es el interruptor. Desde el punto de vista eléctrico, el interruptor es un dispositivo biestable, pues está *cerrado* o *abierto*. Un interruptor ideal no ofrece resistencia a la corriente cuando está cerrado, pero presenta una resistencia infinita cuando está abierto. Estos dos estados representan los valores límite de una resistencia; es decir, el estado *cerrado* corresponde a una resistencia de valor numérico cero y el estado *abierto* corresponde a una resistencia de valor numérico infinito. Estos dos valores extremos reciben los descriptivos nombres de *cortocircuito* ($R = 0$) y *circuito abierto* ($R = \infty$), ya mencionados en párrafos anteriores. Las Figuras B-1a) y B-1b) muestran la representación gráfica de un cortocircuito y un circuito abierto. El símbolo de la Figura B-1c) representa el hecho de que un interruptor puede ser un cortocircuito o un circuito abierto, dependiendo de la posición de sus contactos.

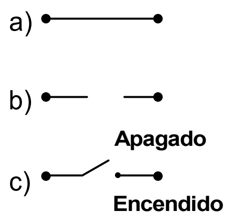


**Figura B-1:** Símbolo de circuito para: a) un cortocircuito, b) un circuito abierto, c) un interruptor.

Se puede construir ahora el modelo de circuito de la linterna. Se debe observar que los componentes de la lámpara se conectan en línea o *en serie*. Es decir, comenzando por las pilas, el terminal positivo de una pilase conecta al terminal negativo de la otra, como se aprecia en la Figura B-2. El terminal positivo de la segunda pila se conecta a un terminal de la lámpara. El otro terminal de la lámpara hace contacto con uno de los lados del interruptor, mientras que el otro lado del interruptor se conecta al cuerpo metálico. El cuerpo metálico se conecta al terminal negativo de la primera pila, a través del resorte metálico. Se puede ver que los elementos forman un camino o circuito cerrado. En la Figura B-2 se usa una línea punteada para ilustrar este camino cerrado. La Figura B-3 muestra el *modelo de circuito* para la linterna.

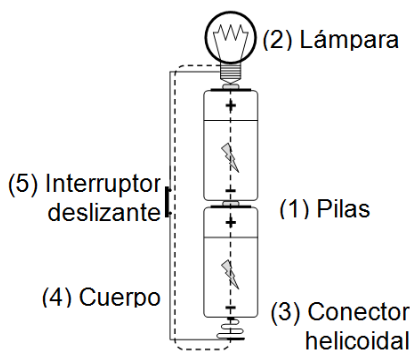


**Figura B-2:** Disposición de los componentes de la linterna

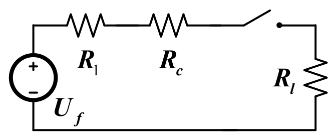


**Figura B-3:** Modelo del circuito para la linterna

Conviene hacer algunos comentarios generales sobre el modelo de la linterna. En primer lugar, se han empleado resistores ideales para modelar la lámpara, el cuerpo metálico y el trozo de alambre que ejerce la presión mecánica además de servir de conexión eléctrica. La elección de un resistor para modelar componentes físicos tan diversos demuestra que la selección de un elemento de circuito se debe centrar en el fenómeno eléctrico que el elemento representa. En este caso se usó el resistor para modelar por donde fluye de la carga eléctrica en un metal.

Segundo, la resistencia del filamento de la lámpara también tiene una función práctica en el sistema: en el mismo se genera el calor que produce la luz de la linterna. Sin embargo, en la resistencia eléctrica del cuerpo de la linterna y del conector se generarán efectos no deseados, o parásitos. Al construir modelos de circuito de dispositivos hay que tener en mente estos efectos parásitos; de lo contrario, es posible que los modelos no representen adecuadamente el sistema.

Tercero, la construcción de un modelo de circuito para un sistema tan sencillo como éste requiere aproximaciones. Se ha supuesto que había un interruptor ideal, pero en los interruptores reales la resistencia del contacto puede ser lo suficientemente alta como para interferir la operación correcta del sistema. El modelo propuesto no predice este comportamiento. También se ha supuesto que el conector helicoidal aplica la presión suficiente como para eliminar cualquier resistencia de contacto entre las pilas. El presente modelo no predice el posible efecto de una presión inadecuada. Emplear una fuente de tensión ideal ignora la descarga de las pilas en el tiempo y además la menor tensión consecuencia de la corriente, lo que podría considerarse si se añade un resistor ideal en serie con la fuente.

Finalmente y como se observa del presente análisis, el modelo puede ser tan complejo como se desee, siempre en función de la exactitud con la cual se requiera representar el sistema de interés.

### B.1.2 Modelo de un circuito desconocido

Se puede ilustrar la construcción de un modelo, no sólo a partir de la observación directa de los elementos constitutivos de un sistema, sino también a partir del resultado de mediciones.

Supóngase que se tiene un dispositivo del cual se desconocen sus componentes y disposición de los mismos, pero en cambio es factible realizar mediciones sobre el mismo. Este es el caso planteado a continuación, en el cual se miden la tensión y la corriente de sus terminales para diferentes condiciones de funcionamiento (Figura B-3). A partir de las diferentes tensiones y corrientes medidas se puede confeccionar una tabla de valores (Figura B-4), y con ésta es posible construir un gráfico (Figura B-5).

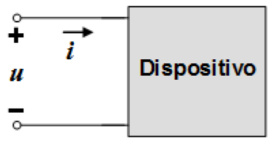



**Figura B-4:** Dispositivo en el cual se miden la tensión y la corriente

| $i$ [A] | $u$ [V] |
|---|---|
| -5 | -40 |
| 0 | -20 |
| 5 | 0 |
| 10 | 20 |
| 15 | 40 |

**Figura B-5:** Tabla de valores

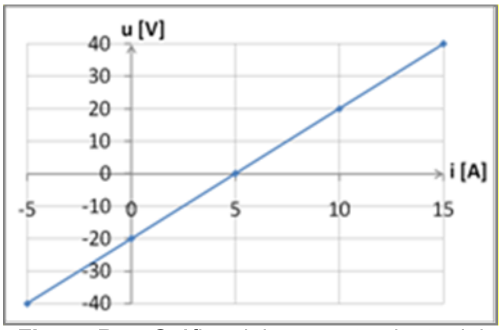



**Figura B-5:** Gráfico del comportamiento del dispositivo de la Figura 2-20

Del gráfico de la Figura B-5 se observa que el dispositivo exhibe linealidad entre la tensión y la corriente. Independientemente del tipo de elemento, es posible con la información relevada (gráfico), escribir la siguiente expresión: $u(i) = 4i - 20$

La función anterior constituye el *modelo matemático* que representa el comportamiento del dispositivo.

# APÉNDICE C
# Bibliografía ampliatoria


Alexander-Sadiku. (2002). *Fundamentos de Circuitos Eléctricos.* México: Mc Graw-Hill.

Boylestad. (2004). *Análisis Introductorio de Circuitos*. México: Pearson Education.

Carlson. (2001). *Circuitos*. México: Thomson Learning.

Dorf. (1995). *Circuitos eléctricos*. México: Alfaomega.

Edminister. (1988). *Circuitos eléctricos*. Serie Schawm. México: McGraw-Hill.

Hayt-Kemmerly. (1995). *Análisis de circuitos en ingeniería*. México: Mc Graw-Hill.

Faradje-Kahn. (1976). *Apuntes de electrotecnia general*. La Plata: Ceilp

Jhonson-Hilburn-Jhonson. (1991). *Análisis básico de circuitos eléctricos*. México: Prentice Hall.

Netushil-Strajov. (1963). *Principios de electrotecnia*. Argentina: Nuestro Tiempo.

Nilsson. (1995). *Circuitos eléctricos*. Massachusetts: Addison-Wesley.

Nilsson-Riedel. (2005). *Circuitos eléctricos*. Madrid: Pearson Prentice Hall Pearson Educacion.

Pueyo-Marco. (2002). *Análisis de modelos circuitales*. México: Alfaomega.

Rizzoni. (2002). Principios y aplicaciones de ingeniería eléctrica. Bogotá: McGraw-Hill.

Sanjurjo-Lázaro-de Miguel. (1997). Teoría de circuitos eléctricos. España: McGraw-Hill.

Scott. (1990). *Introducción al análisis de circuitos*. Bogotá: McGraw-Hill.

Skilling. (1962). *Circuitos en ingeniería eléctrica*. México-Barcelona: CECSA.

Sobrevila. (1976). *Circuitos eléctricos y magnéticos*. Buenos Aires: Marymar.

Sobrevila. (año). *Ingeniería de la energía eléctrica*. Buenos Aires: Marymar.

Spinadel. (1982). *Circuitos eléctricos y magnéticos. Temas especiales*. Buenos Aires: Nueva Librería.

Zeveke-Ionkin. (1963). *Principios de electrotecnia*. Argentina: Nuestro Tiempo.

# APÉNDICE D
# Ejemplos Resueltos

En los ejemplos que siguen, a los efectos de no sobrecargar los dibujos de los circuitos, no se han indicado explícitamente todas las corrientes y/o polaridades de las tensiones. Sin embargo se sugiere al lector copiar, consciente de tal proceder, el circuito ampliado y completar todos los parámetros involucrados de modo de poder verificar las formulaciones que se presentan.

## D.1 Cálculo de los circuitos equivalentes de Thevenin y de Norton

Considerando el circuito de la Figura 3.9 de la sección 3.3.4 del Capítulo 3, que se repite en la Figura D-1, y con los siguientes datos $U_f = 10$ V; $I_f = 5$ A; $R_1 = 2\ \Omega$, $R_2 = 1\ \Omega$ y $R_3 = 1\ \Omega$

**D.1.1** Calcular el circuito equivalente Thevenin entre $A$ y $B$ visto desde $R_2$. Luego calcular la tensión en $R_2$.

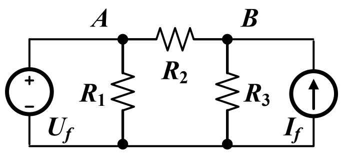



**Figura D-1**

Para la determinación del valor de la tensión de la fuente del circuito equivalente de Thevenin ($U_{TH}$) que "ve" $R_2$ es necesario calcular la tensión de circuito abierto ($U_{ABca}$) en la configuración circuital siguiente.

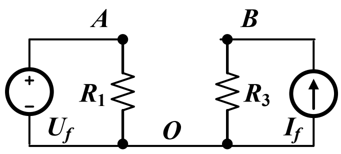



**Figura D-2**

En cada malla del circuito de la Figura D-2 es fácil comprobar que $U_{AO} = U_f$ y $U_{BO} = I_f \cdot R_3$, por lo que resulta

$$U_{ABca} = U_{AO} - U_{BO} = U_f - I_f \cdot R_3 = U_{TH} \qquad \text{Ec. D-1}$$

Ahora, realizando un cortocircuito entre los puntos $A$ y $B$, el cálculo de la corriente en el mismo ($I_{ABcc}$) establece el valor del parámetro faltante para determinar $R_{TH}$.

Lo explicado resulta

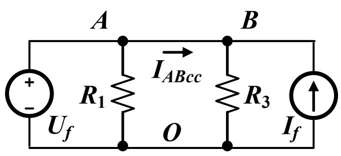



**Figura D-3**

Planteando en el circuito de la Figura D-3 la *LKC* en el nodo $B$ se obtiene $I_{ABcc} = I_{R_3} - I_f$. Prestando atención a la nueva configuración se comprueba que ahora $U_{AO} = U_{BO} = U_f$ y en consecuencia

$$I_{ABcc} = I_{R_3} - I_f = \frac{U_{BO}}{R_3} - I_f = \frac{U_f}{R_3} - I_f \qquad \text{Ec. D-2}$$

Recordando que $R_{TH} = U_{ABca} / I_{ABcc}$, con las Ec. D-1 y D-2 se obtiene

$$R_{TH} = \frac{U_f - I_f \cdot R_3}{U_f / R_3 - I_f} = R_3 \cdot \frac{U_f - I_f \cdot R_3}{U_f - I_f \cdot R_3} = R_3 \qquad \text{Ec. D-3}$$

Por lo tanto el circuito equivalente de Thevenin, con $R_2$ conectada, resulta:

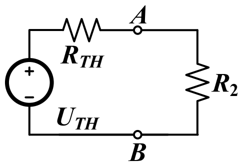



**Figura D-4**

Como se aprecia en la Figura D-4, el circuito de Thevenin está conformado por $\boldsymbol{U_{TH}}$ en serie con $R_{TH}$, es decir, el circuito que $R_2$ “ve” entre $A$ y $B$.

Ahora sí, reemplazando valores y haciendo los cálculos:

$$U_{TH} = U_f - I_f \cdot R_3 = 10\ \text{V} - 5\text{A} \cdot 1\,\Omega = 5\ \text{V}$$
$$R_T = R_3 = 1\,\Omega \qquad \text{Ec. D-4}$$

Y finalmente, la tensión en $\boldsymbol{R_2}$ resulta:

$$U_{R2} = \frac{U_{TH} \cdot R_2}{R_2 + R_T} = \frac{5\ \text{V} \cdot 1\,\Omega}{1\,\Omega + 1\,\Omega} = 2{,}5\ \text{V} \qquad \text{Ec. D-5}$$

**D.1.2** Calcular el circuito equivalente de Norton entre $A$ y $B$ también visto desde $R_2$. Luego calcular la corriente en $R_2$.

Igual que se procedió en D.1.1, para la determinación del valor de la corriente de la fuente del circuito equivalente de Norton ($I_N$) que “ve” $R_2$ es necesario calcular la corriente de cortocircuito ($I_{ABcc}$) en la configuración circuital de la Figura D.3, resultado ya obtenido en la Ec. D-2.

Como ya se sabe que $G_N = I_{ABcc} / U_{ABca}$ , es obvio que

$$G_N = 1/R_{TH} = G_3 \qquad \text{Ec. D-6}$$

En definitiva el circuito equivalente de Norton y también con $R_2$ conectada en la versión $G_2$, resulta:

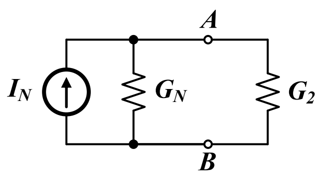



**Figura D-5**

También en este caso se aprecia en la Figura D-54 que el circuito de Norton está conformado por $I_N$ en paralelo con $G_N$, o sea, el circuito que $G_2$ “ve” entre $A$ y $B$.

Nuevamente, reemplazando valores y haciendo los cálculos:

$$I_N = U_f / R_3 - I_f = 10\ \text{V}/1\,\Omega - 5\ \text{A} = 5\ \text{A}$$
$$G_N = 1/R_T = 1\ \text{S} \qquad \text{Ec. D-7}$$

Y finalmente, la corriente en $\boldsymbol{G_2}$ resulta:

$$I_{G2} = \frac{I_N \cdot G_2}{G_2 + G_N} = \frac{5\ \text{A} \cdot 1\ \text{S}}{1\ \text{S} + 1\ \text{S}} = 2{,}5\ \text{A} \qquad \text{Ec. D-8}$$

La corriente calculada en la Ec. D-8 puede comprobarse con la versión de Thevenin de la Figura D-4.

Un buen desafío es otra comprobación mediante el análisis de superposición ya visto en este mismo ejemplo de circuito en la sección 3.3.4 del Capítulo 3.

## D.2 Resolución fasorial de un circuito

Un circuito serie $RLC$ se excita con una fuente de tensión alterna senoidal con los siguientes datos: $f = 50$ Hz; $\underline{U}_f = 155$ V /$\underline{0º}$; $R = 10\ \Omega$, $X_L = 7\ \Omega$ y $X_C = 2\ \Omega$.

**D.2.1** Determinar la impedancia equivalente del circuito

El circuito que representa la situación planteada es el siguiente:

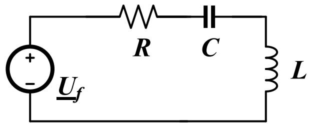



**Figura D-6**

Para el circuito de la Figura D-6, considerando los dos elementos reactivos a través de sus correspondientes reactancias, la impedancia compleja del conjunto serie de los elementos pasivos es:

$$\underline{Z}_T = R + jX_L - jX_C = R + j\left(X_L - X_C\right) = 10\,\Omega + j\left(7 - 2\right)\Omega = \left(10 + j5\right)\Omega \qquad \text{Ec. D-9}$$

Con esta impedancia el circuito de la Figura D-6 puede considerarse en forma general como el circuito de la Figura D-7.

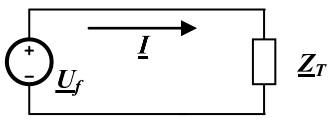



**Figura D-7**

La versión binómica de parte real (representativa en este caso del componente pasivo no reactivo $R$) y parte imaginaria (vinculada a través de $\omega = 2\pi f$ a los dos componentes reactivos complementarios $L$ y $C$) de la Ec. D-9 puede convertirse en modulo y fase de la versión polar, indicadas en la Ec. D-10

$$\left|\underline{Z}_T\right| = \left|R + jX_L - jX_C\right| = \sqrt{R^2 + \left(X_L - X_C\right)^2} = 11{,}18\,\Omega$$
$$arg\left(\underline{Z}_T\right) = arctg\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right) = arctg\left(\frac{5}{10}\right) = 26{,}6º \qquad \text{D-10}$$

**D.2.2** Calcular la corriente y las tensiones en cada elemento.

Aplicando la "ley de Ohm" estudiada con fasores, $\underline{I} = \dfrac{\underline{U}_f}{\underline{Z}_T}$ ,y teniendo en cuenta los datos de la fuente de tensión y los resultados de la Ec. D-10 resulta:

$$\underline{I} = \frac{\left|\underline{U}_f\right| e^{j0º}}{\left|\underline{Z}\right| e^{j26{,}6º}} = \frac{155\,\text{V}}{11{,}18\,\text{A}} \cdot e^{j[0\text{-}26{,}6º]} = 13{,}86 \cdot e^{-j \cdot 26{,}6º}\text{A} \qquad \text{D-11}$$

Ampliando el detalle de las tensiones y su polaridad en el circuito de la Figura D-8, el cálculo de estas se muestra en las Ec.D-12

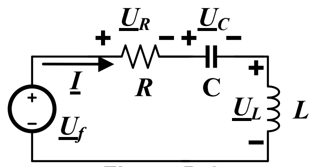



Figura D-8

$$\underline{U}_R = \underline{I} \cdot R = \left(13,86 \cdot e^{-j26,6^\circ} \cdot 10\right) \text{V} = 138,6 \text{ V } e^{-j26,6^\circ}$$
$$\underline{U}_C = \underline{I} \cdot \left(-jX_C\right) = 13,86\, e^{-j26,6^\circ} \cdot \left(-j2\right) = 13,86\, e^{-j26,6^\circ} \cdot 2\, e^{-j90^\circ} = 27,72 \text{ V } e^{-j116,6^\circ} \qquad \text{D-12}$$
$$\underline{U}_L = \underline{I}\left(jX_L\right) = 13,86\, e^{-j26,6^\circ} \cdot j7 = 13,86\, e^{-j26,6^\circ} \cdot 7\, e^{j90^\circ} = 97,04 \text{ V} e^{j63,4^\circ}$$

Recordando la conversión polar a binómica, $\text{M} \cdot e^{j\phi} = \text{M}\left(\cos\left(\phi\right) + j \operatorname{sen}\left(\phi\right)\right)$, cada tensión en la Ec. D-12 resulta:

$$\underline{U}_R = 138,6\, e^{-j26,6^\circ} \text{ V} = \left(123,93 - j62,06\right)\text{V}$$
$$\underline{U}_C = 27,72\, e^{-j116,6^\circ} \text{ V} = \left(-12,41 - j24,78\right)\text{V} \qquad \text{D-13}$$
$$\underline{U}_L = 97,04\, e^{j63,4^\circ} \text{ V} = \left(43,45 + j86,77\right)\text{V}$$

Es fácil comprobar que la suma de las Ec. D-13, a menos del error de redondeo de la parte decimal, coincide con el valor de $\underline{U}_f$.

**D.2.3** Dibujar el diagrama fasorial completo

El diagrama fasorial completo comprende una corriente y cuatro tensiones.

En la versión de la Figura D-9, cada uno de los cinco fasores está representado con referencia al origen debiéndose fijar una escala para las tensiones y otra para la corriente. Para el ejemplo se estableció $50\,\text{V/cm}$ y $4\,\text{A/cm}$. Los ángulos, para la imagen detenida en $t = 0$, surgen de las exponenciales de $\underline{U}_f$ y de las Ec. D-11 y D13. Se aprecia además la indicación de la velocidad de rotación del gráfico y su sentido.

Si la excitación senoidal fuese, por ejemplo una señal armónica coseno, ya se sabe que la parte real de cada fasor representa su respectiva forma de variación senoidal en el tiempo.

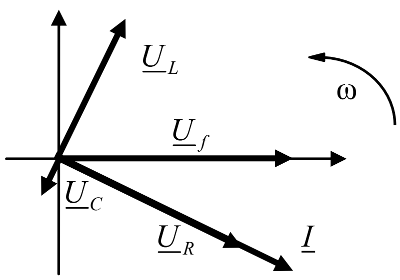



Figura D-9

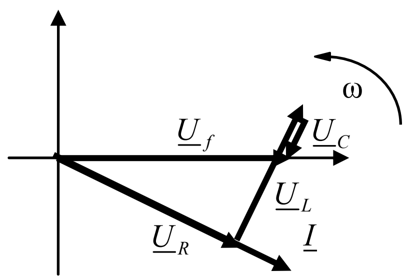



Figura D-10

En la Figura D-10 se ha realizado la suma gráfica de las tensiones encadenando los fasores de las tensiones, comprobándose (LKT de por medio) la afirmación inmediata posterior

a las Ec. D-13. Esta forma de dibujo permite, por ejemplo, obtener gráficamente modulo y fase de del fasor que debe cerrar el diagrama.

Un aspecto muy útil de este diagrama es que permite fácilmente determinar la característica del circuito pasivo respecto al desfasaje de la corriente y la tensión aplicada. En este caso se comprueba que la corriente queda atrasada respecto a la tensión, es decir tiene más peso la parte reactiva inductiva respecto a la parte reactiva capacitiva.

Un desafío interesante sería ver cómo cambia la representación del diagrama fasorial para otros valores de las reactancias y en particular cuando ambas son de igual valor absoluto.

Y dos últimos detalles.

Dado que el giro de los fasores componentes del diagrama no altera el desfasaje relativo de los mismos, la imagen detenida del mismo en cualquier momento es siempre la misma solo rotada. En consecuencia los ejes del plano complejo no son imprescindibles para la realización del mismo y basta elegir el fasor de alguna de las señales como referencia para el resto (la corriente serie del circuito).

Recordar que el módulo de los fasores corresponde siempre al valor máximo de la señal que representan.

## D.3 Aplicación de respuesta temporal de un circuito

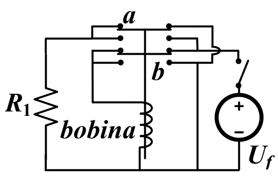



**Figura D-11**

La Figura D-11 muestra un relé con dos contactos *doble inversor* ($a$ y $b$) normalmente hacia arriba, que se conmutan simultáneamente por acción del flujo magnético que, cuando la fuente $U_f$ se conecte, se produce en la *bobina* moviendo hacia abajo el núcleo solidario a dicho conjunto de contactos.

Con más detalle, dado que la bobina se puede modelar con el conjunto serie $R$ con $L$, la corriente en dicho circuito cuando se conecta la fuente de tensión deberá cumplir el crecimiento transitorio correspondiente determinando idéntico crecimiento del flujo magnético.

En consecuencia después de un tiempo se consigue el nivel magnético para la conmutación lo que implica que la *bobina*, a través de del contacto $b$, quede en cortocircuito y que $R_1$ pase de estar de en cortocircuito a tener aplicada la tensión de $U_f$ a través del contacto $a$.

El cortocircuito del equivalente $R$ $L$ recién explicado tiene como consecuencia la "descarga" magnética de la *bobina* y por lo tanto después de un cierto tiempo la acción de núcleo hacia abajo no se puede mantener y los contactos vuelven a su estado inicial normal.

Como se aprecia se ha descripto un dispositivo, que luego de cerrar la llave para conectar $U_f$, repite un ciclo de conmutación determinando la aparición en $R_1$ de un tren de pulso de tensión justamente con el valor de dicha fuente de tensión.

Los datos para poder analizar el circuito eléctrico que representa el dispositivo explicado son: $U_f = 24\,\mathrm{V}$; el equivalente eléctrico de la *bobina* $R = 48\,\Omega$, $L = 150\,\mathrm{mH}$; el valor de la corriente que consigue el flujo magnético que tira hacia abajo los contactos; $I_{Ab} = 400\,\mathrm{mA}$ y el valor de dicha corriente que hace que el flujo magnético sea insuficiente para mantener los contactos hacia abajo $I_{Ar} = 200\,\mathrm{mA}$.

**D.3.1** Determinación del circuito representativo del dispositivo.

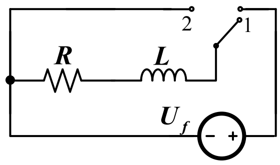



**Figura D-12**

Como ya se explicó la serie $R\,L$ modela la bobina y la llave en la posición $1$, el contacto $a$ arriba con la fuente de tensión ya conectada.

**D.3.2** Análisis temporal del circuito.

Conviene hacer el análisis del circuito a partir del final del primer ciclo considerando ese instante $t = 0$. El final del primer ciclo se da, estando la llave en $2$, cuando la corriente que venía disminuyendo a cero pasa por $I_{Ar} = 200\,\mathrm{mA}$, generando el cambio de la llave a $1$.

A partir de ese momento, inicio del segundo ciclo, la corriente crece a partir del valor inicial $I_{L0} = I_{Ar} = 200\,\mathrm{mA}$ tendiendo al valor final que impone $U_f$.

Teniendo en cuenta la Ec. 6-11 del capítulo 6, la corriente transitoria resulta:

$$i_{Tcrec}(t) = \left( I_{L0} - \frac{U_f}{R} \right) \cdot e^{-t/\tau} + \frac{U_f}{R} \qquad \text{D-14}$$

y para los valores consignados con $\tau = 3{,}125\,\mathrm{ms}$.

$$i_{Tcrec}(t) = \left( 500 - 300 \cdot e^{-t/\tau} \right) \mathrm{mA} \qquad \text{D-15}$$

Como ya se dijo, cuando esta corriente pasa por $I_{Ab} = 400\,\mathrm{mA}$ la llave vuelve a $2$ permitiendo la disminución de la corriente a partir de ese valor inicial (es una buena oportunidad para recordar que la corriente en un inductor no puede tener cambios bruscos en el tiempo).

Esta nueva situación, dado que el valor final de la corriente es nulo, establece que el valor natural sea el representativo de la corriente en el tiempo. Es decir:

$$i_{Tdecrec}(t') = I_{Ab} \cdot e^{-t'/\tau} = 400 \cdot e^{-t'/\tau}\ \mathrm{mA} \qquad \text{D-16}$$

En la Ec. D-16, el tiempo debe ser $t' = t + \Delta t$ dado que esa corriente comienza a decrecer cuando, en su previo crecimiento, haya llegado al valor de operación del relé. Dicho decrecimiento culmina cuando llega a $I_{Ar} = 200\,\mathrm{mA}$, tiempo a partir del cual se repite el ciclo ya reiteradamente explicado.

**D.3.3** Gráficos de la corriente en la bobina.

La siguiente Figura D-13 muestra las representaciones de cada tramo de la corriente dadas por las Ec. D-15 y D-16.

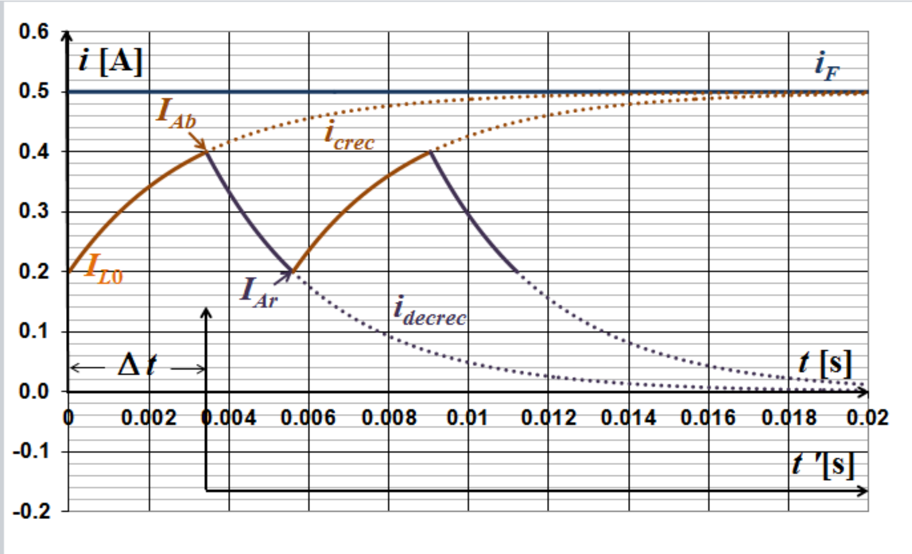



**Figura D-13**

Algunos comentarios de la Figura D-13:

- $I_{L0}$ se indica como recordatorio de su participación genérica en la Ec. D-14 y se aprecia que tiene el ya explicado valor de $I_{Ar}$ .
- Las corrientes crecientes en la bobina son tramos de la Ec. D-15 , que de no operar el relé llegarían al valor $I_F = U_f / R$ -
- Lo mismo respecto a las corrientes decrecientes, respecto de la Ec. D-16 y el valor final nulo.

Por último se alienta al lector a calcular el valor de $\Delta t$ y la frecuencia de repetición de cada ciclo y con esos datos graficar la forma de onda de la tensión en $R_1$ .

Libros de Cátedra

Deorsola, Marcos Félix Pedro
Circuitos eléctricos : parte 1 / Félix Pedro Deorsola ; Pablo Morcelle Del Valle. - 1a ed . - La Plata : Universidad Nacional de La Plata, 2017.
Libro digital, PDF

Archivo Digital: descarga y online
ISBN 978-950-34-1487-3

1. Circuitos Eléctricos. I. Morcelle Del Valle, Pablo II. Título
CDD 621.3

Diseño de tapa: Dirección de Comunicación Visual de la UNLP

Universidad Nacional de La Plata – Editorial de la Universidad de La Plata
47 N.º 380 / La Plata B1900AJP / Buenos Aires, Argentina
+54 221 427 3992 / 427 4898
edulp.editorial@gmail.com
www.editorial.unlp.edu.ar

Edulp integra la Red de Editoriales Universitarias Nacionales (REUN)

Primera edición, 2017
ISBN 978-950-34-1487-3


e
exactas

Editorial de la Universidad de La Plata

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA